VV. 1797.

Math. P. 477 -1

Mathesis. Algebra generalis 231.

R

Allgemein faßliche

Anleitung

zur

Algebra

durch

häufige Beyspiele erläutert;

zu

Ergänzung des mündlichen Unterrichts.

von

Gottlieb Friderich Rösler. Prof.

Erster Theil.

Stuttgart,

bei Erhard und Löflund,

1789.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Vorrede.

Der zahlreichen Lehrbücher und Anleitungen zur Algebra ungeachtet, welche besonders in den leztern Jahren ans Licht getreten sind, möchte doch gegenwärtiges um seiner Einrichtung willen nicht ganz überflüssig seyn. Ueberhaupt ist bey einer Wissenschaft von so ausgebreitetem Nutzen von grosser Wichtigkeit, die Anfangsgründe so sehr zu erleichtern, als möglich, und die Anwendung so gemeinnützig darzustellen, als sich nur immer thun lässet: daher die Anweisungen, die diesen Zweck haben, und solchem getreu bleiben, selbst wenn sie keine neue Aussichten enthalten können, nicht zu sehr vervielfältiget werden mögen. Insbesondere aber ist bey der Wissen-

senschaft, die der Gegenstand dieser Anleitung ist, noch immer der Wunsch übrig, daß ihre Ausübung bey einigen Ständen, deren Berufsgeschäfte vieles Rechnen erfordern, noch allgemeiner ausgebreitet werden möge, als noch bisher geschehen. Wenn daher unter die Hindernisse dieser Ausbreitung die eingebildete Schwürigkeiten bey Erlernung derselben mit Recht müssen gezählet werden, so dörften Versuche, die jene zu heben dienlich seyn könnten, wol nicht als überflüssig abzuweisen seyn. Der Verfasser hat daher bey dieser Arbeit folgendes vorzüglich zu leisten sich angelegen seyn lassen. Vor allem suchte er durch eine vorzügliche Deutlichkeit besonders Anfänger, welche öfters ein dunkeler oder allzuabgekürzter Vortrag abschrökt, zu dieser vortreflichen Wissenschaft zu ermuntern. Sodann suchte er ihnen durch eine ausgezeichnete Menge von Beyspielen zu Hülfe zu kommen, und für solche, die des Vortheils einer mündlichen Erklärung entbehren müssen, eben dadurch solchen zu ersetzen, daß er ihnen durch häufige Beyspiele die Sätze und Verfahrungsarten geläufig zu machen sich bestrebte. Ferner hatte er die Absicht, durch Anzeige vieler Methoden und Auflösungsarten, sowol die Aufgaben selbst von verschiedenen Seiten her vorzustellen, als auch Anfänger im Nachdenken zu üben, wie man

durch vielerley Wege zu Erreichung von einerley Endzweck geführt werden könne. Da der Verfasser zu lezterer Absicht in dem vortreflichen Werke von Mako, de Arithmeticis et Geometricis æquationum Resolutionibus. Vindob. MDCCLXX. sich in vieler Ordnung und zweckmässiger Ausführlichkeit ungemein vorgearbeitet fand, so glaubte er, durch Uebersetzung und Einschaltung des Ersten Buchs jenes Werks diesen Zweck um so mehr zu befördern, da theils dieses Werk selten in die Hände der Anfänger kommt, theils er selbst noch die in dem angezeigten Werke vorgetragene vielerley Methoden durch Zusätze und Beyträge noch mehrerer Auflösungsarten zu erläutern bemüht war; wovon besonders der zweyte Theil Proben geben wird. Er wird noch überdieses durch Anführung mancherley sehr brauchbarer Rechnungsarten, die in vielen Lehrbüchern dieser Art sonst zu fehlen pflegen, diese Lücke auszufüllen suchen; dergleichen sind: allerley nüzliche Anwendungen der Reihen; die Interpolations-Methode; Zeitrechnung, u. a. m. Da er sein Werk, unabhängig von anderen, so brauchbar als möglich machen wollte, so hat er das, was die Algebra von der allgemeinen Rechenkunst überhaupt voraussezt, an schicklichen Orten, wo das Bedürfniß derselben eintrat, einzuschalten gesucht, und er glaubt darüber keine

Entschuldigungen oder weitläufigere Erörterungen ihres Zwecks nöthig zu haben. Wie nahe nun überhaupt in diesem Ersten Theile der Verfasser der Erfüllung seines angezeigten Endzwecks gekommen, wollen billige Kenner gütig beurtheilen. Die am Ende angezeigten Verbesserungen bittet er vor dem Gebrauche des Buchs zu berichtigen. Der zweyte Theil wird unverzüglich unter die Presse gegeben werden.

Stuttgart. Im April. 1789.

Gottlieb Friderich Rösler,
Professor.

Innhalt.

Der erste Abschnitt.

Von den einfachen bestimmten Gleichungen, oder den bestimmten Gleichungen vom ersten Grad.

Das erste Kapitel.

Die erste Abtheilung. Erste Begriffe von Gleichungen überhaupt, und von Bildung und Auflösung einfacher Gleichungen mit Einer unbekannten Grösse. S. 1

Die zweyte Abtheilung. Von einfachen Gleichungen mit zwey, drey und mehreren unbekannten Grössen. S. 15

Die dritte Abtheilung. Bildung von Proportionen aus Gleichungen, und umgekehrt; nebst beyläufiger Nachricht von einigen bey Verhältnissen vorkommenden Benennungen. S. 20

Das zweyte Kapitel. Anwendung der Gleichungen auf analytische Auflösung arithmetischer Aufgaben.

Die erste Abtheilung. Bestimmte arithmetische Aufgaben. S. 26

Die zweyte Abtheilung. Unbestimmte arithmetische Aufgaben. S. 67

Die d itte Abtheilung. Von der Art und den Vortheilen einer geschickten Benennung oder Substitution, bey arithmetischen Aufgaben. S. 81

Das dritte Kapitel. Rechnung mit Potenzen und Wurzelgrössen. S. 89

Das

Innhalt.

Das vierte Kapitel. Von den arithmetischen Progressionen. S. 105.

Das fünfte Kapitel. Von den geometrischen Progressionen. S. 123

Das sechste Kapitel. Von den Logarithmen. S. 145

Das siebente Kapitel. Die Binomische Regel, zur allgemeinen Potenzirung und Wurzelausziehung. S. 161

Der zweyte Abschnitt. Von der Natur und den Eigenschaften zusammengesezter Gleichungen. (Nach Mako.)

Einleitung. Vom Ordnen der Gleichungen, ihren Graden, Reduktion und Wurzeln überhaupt. S. 171

Das erste Kapitel. Vom Ursprung und Entstehung zusammengesezter Gleichungen. S. 182

Das zweyte Kapitel. Von einigen Transformationsarten der Gleichungen. S. 200

Das dritte Kapitel. Von Gleichungen, welche zwey oder mehrere gleiche Wurzeln haben. S 220

Das vierte Kapitel. Von den Gränzen (Schranken) zwischen denen die Wurzeln der Gleichungen enthalten sind. S. 231

Das fünfte Kapitel. Von Zu- und Abnahme der Werthe einer Gleichung, die von beständiger Veränderung der unbekannten Grösse herrühret. S. 248

Das sechste Kapitel. Von den grösten und kleinsten Werthen der Gleichungen. S. 262

Erster

Erster Abschnitt.

Von den einfachen bestimmten Gleichungen, oder den bestimmten Gleichungen vom ersten Grad.

Erstes Kapitel.

Erste Abtheilung. Erste Begriffe von Gleichungen überhaupt, und von Bildung und Auflösung einfacher Gleichungen mit einer unbekannten Grösse.

§. 1.

Eine Gleichung (Aequatio) ist ein gedoppelter Ausdruck von einerley Grösse. Die vollkommene Uebereinstimmung dieser beyden Ausdrücke wird durch das Zeichen der Gleichheit (=) angezeiget. Z. B. $4 + 6 = 2 . 5$.

Es müssen aber auch wirklich zwey verschiedene Ausdrücke seyn, welche die nemliche Grösse bezeichnen, wenn sie zu Auflösung von Aufgaben brauchbar seyn sollen: denn, sagt der eine gerade das, was der andere sagt, so erhält man eine sogenannte leere,

identische Gleichung, aus welcher sich nichts weiter folgern lässet. So ist z. B. $a + b = c - d$, oder $m + n = o + p$ eine brauchbare Gleichung; hingegen $x + a = x + a$ oder $a^2 - x^2 = (a + x)(a - x)$ eine leere Gleichung. Man erhält allemal eine solche identische Gleichung, wenn bloß die Charakteristik zweyerley gleichgeltende Ausdrücke verschiedentlich bezeichnet. Z. B. $m : n = \frac{m}{n}$ oder $\sqrt[m]{u^n} = u^{\frac{n}{m}}$. Dergleichen leere Gleichungen können, wo eine gewisse Anzahl von Gleichungen zu einer Aufgabe erfordert wird, nicht mit gezählet werden: inzwischen haben doch solche gleichgeltende Ausdrücke alsdenn ihren Nutzen, wenn entweder der eine oder der andere durch Substitution die Auflösung einer anderen Gleichung erleichtern kann.

§. 2.

Die durch das Zeichen der Gleichheit geschiedene Ausdrücke geben die beyderley Seiten der Gleichung (Membra æquationis). Die Theile der Gleichung selbst aber heissen Glieder (Termini). Diese können auch aus mehreren Grössen zusammengesezt seyn, z. B. ein Produkt ab, ein Quotient $\frac{m}{n}$. Sie werden durch Addition und Subtraktion verbunden $a + b - c$, wo $a + b - c$ drey verschiedene Glieder sind. Ein solcher Ausdruck, in welchem mehrere Grössen durch + oder − mit einander verbunden sind, heißt eine zusammengesezte, mehrtheilige Grösse (Quantitas complexa); und zwar heißt sie zweytheilig, dreytheilig, viertheilig (binomia, trinomia, quadrinomia ꝛc.) nach der Anzahl der verbundenen Grössen. Sonst heißt jede Grösse einfach

fach oder eintheilig (quantitas monomia), wenn sie mit keiner anderen durch + oder — verbunden ist, wie a; b; ab; xyz.

§. 3.

Die Glieder einer Gleichung können theils bekannte, theils unbekannte Grössen seyn, von denen jene durch die ersten AlphabetsBuchstaben a; b; c; m; n ꝛc. diese aber durch die lezteren x; y; z bezeichnet werden. Eine Gleichung heißt Einfach, vom niedrigsten Grade, wenn die darinnen vorkommende unbekannte Grösse zu keiner höheren Potenz erhoben ist, z. B. $a + x = b$; so wie sie hingegen vom zweyten Grade, oder eine quadratische Gleichung genennt wird, wenn die unbekannte Grösse zur zweyten Potenz erhoben ist, oder im Quadrat vorkommt, z. B. $a + bx + x^2 = m$; Cubisch oder vom dritten Grade heißt sie bey der 3ten Potenz z. B. $x^3 - ax = b$. u. s. w.

§. 4.

Gewöhnlich ist es darum zu thun, vermittelst der Auflösung einer Gleichung die darinnen enthaltene unbekannte Grösse zu finden. Eine Gleichung auflösen heißt, ihr die Gestalt geben, daß die unbekannte Grösse auf der einen, und auf der andern Seite lauter bekannte Grössen stehen. Eine bestimmte Gleichung ist, welche nur ein einziges Resultat gibt; eine unbestimmte Gleichung aber, welche mehrere Auflösungen zulässet. Z. B. $a + x = b$ ist eine bestimmte Gleichung. $x + y = b$ ist eine unbestimmte Gleichung: denn je nachdem man eine Grösse für x annimmt, je nachdem wird y immer wieder anders werden.

§. 5.

Nichts ist nun leichter, als eine bestimmte einfache Gleichung aufzulösen. Die ganze Operation beruhet auf den ersten Grundsätzen, welche der Verstand aus den ersten Begriffen von Grösse und Gleichheit nothwendig als wahr erkennen muß.

1.) Wenn man gleiches zu gleichem addiret, so kommen gleiche Summen.

2.) Wenn man gleiches von gleichem subtrahirt, so bleiben gleiche Differenzen.

3.) Wenn man gleiches mit gleichem multiplicirt, so erhält man gleiche Produkte.

4.) Wenn man gleiches durch gleiches dividirt, so ergeben sich gleiche Quotienten.

Man setze nun die Gleichung

$$6x - 5 = 20$$

und befolge blos die obigen GrundSätze, so wird man endlich x allein erhalten, und seinen Werth finden.

Man addire zuerst + 5 auf beyden Seiten, so wird, weil es beyderseits geschehen ist, noch immer eine wahre Gleichung vorhanden seyn, und man erhält:

$$6x - 5 + 5 = 20 + 5$$

oder, da sich — 5 und + 5 gegen einander aufheben, so ist

$$6x = 20 + 5$$

nun dividire man beyde Seiten der Gleichung durch 6

$$\frac{6x}{6} = \frac{20 + 5}{6}$$

so kommt

$$x = \frac{20 + 5}{6}$$

oder, auf den kürzesten Ausdruck gebracht,

$$x = \frac{25}{6}$$

$$x = 4\frac{1}{6}.$$

§. 6.

Weil aber das Anschreiben solcher Auflösungen, wenn man es ganz ausführlich nach obigen Grundsätzen befolgen wollte, zu weitläuffig würde, so hat man aus der vorigen Verfahrungsart folgende mechanische Regel abstrahirt.

Man kann auf der einen Seite einer Gleichung ein Glied gänzlich weglassen, wenn man es auf der anderen Seite der Gleichung unter dem Zeichen der entgegengesezten Rechnungsart beyfüget. Denn man siehet, daß in dem vorigen Beyspiel sich die Glieder solchergestalt verlohren, und auf der anderen Seite unter dem Zeichen der entgegengesezten Rechnungsart angeschlossen haben. Man kann nun also zwar der angeführten mechanischen Regel folgen; allein man darf niemal vergessen, worauf sie sich gründet.

Beyspiele zur Uebung.

*) $\frac{3x}{2} = 60$

$3x = 60 . 2.$

$x = \frac{60 . 2}{3} = \frac{120}{3} = 40.$

*) $\frac{x + 6}{2} = 90$

$x + 6 = 180$

$x = 180 - 6$

$x = 174.$

§. 7.

Immer hat man einige Vorbereitungen nöthig, bis man zu dem lezten Ausdruck gelanget, welcher die Finalgleichung genennt wird; man hat die Glieder zu ordnen, durch arithmetische Operationen soviel möglich zusammenzuziehen u. s. w. und alles dieses zusammen heißt man die Reduktion der Gleichung.

Es kann auch der Fall vorkommen, daß die unbekannte Grösse in der Gleichung unter dem Zeichen — vorhanden ist. Man will aber gewöhnlich den positi-

ven Werth derselben wissen. Demnach muß ein mit — bezeichnetes x oder y nach der bisherigen Art auf die andere Seite der Gleichung gebracht werden, um es mit +, oder positiv zu erhalten.

Z. B. $\frac{124 - y}{2} = 30$

$$124 - y = 60$$
$$124 = 60 + y$$
$$124 - 60 = y$$
$$64 = y$$

Manchmal ergibt sich aber, daß unter den gegenwärtigen Bedingungen der Gleichung gar kein positiver Werth vor x möglich ist.

Z. B. $\frac{164 - x}{2} = 800$

$$164 - x = 1600$$
$$164 - 1600 = x$$

hier müßte 1600 von 164 abgezogen werden, woraus erhellet, daß kein positiver Werth möglich; daher ist hier $x = -1436$.

§. 8.

Wenn das Glied der unbekannten Grösse mit etwas dividirt ist, so müssen alle übrige Glieder der Gleichung, soviel ihrer sind, mit diesem Nenner, um ihn vom unbekannten Gliede wegzubringen, multiplicirt werden.

Z. B. $\frac{3y}{2} - 4 = 18$

$$3y - 8 = 36$$
$$3y = 36 + 8$$
$$y = \frac{36 + 8}{3} = \frac{44}{3} = 14\tfrac{2}{3}$$

Es

Es darf auch eine mehrtheilige Grösse, die noch mit einem Divisor verbunden ist, nicht zertrennt werden, ehe der Divisor auf solche Weise weggeschaft ist.

Z. B. $\frac{4x + 2}{3} = 18$

$$4x + 2 = 18 \cdot 3$$

$$4x = 18 \cdot 3 - 2$$

$$x = \frac{18 \cdot 3 - 2}{4} = \frac{54 - 2}{4} = \frac{52}{4} = 13.$$

Um diese Nenner wegzubringen, kann man auch einen gemeinschaftlichen Nenner von den Brüchen suchen, und damit alle Glieder der Gleichung multipliciren.

Z. B. (18)

$$4x + \frac{2x}{6} - 3 = x + \frac{6x}{9} + 5$$

$$72x + \frac{36x}{6} - 54 = 18x + \frac{108x}{9} + 90$$

$$72x + 6x - 54 = 18x + 12x + 90$$

$$78x - 54 = 30x + 90$$

$$78x - 30x = 90 + 54$$

$$48x = 144$$

$$x = \frac{144}{48} = 3$$

*) (48)

$$\frac{x}{2}-\frac{x}{3}-\frac{x}{4}-\frac{x}{8}-\frac{x}{12}-\frac{x}{16}=130-x$$

$$\frac{48x}{2}-\frac{48x}{3}-\frac{48x}{4}-\frac{48x}{8}-\frac{48x}{12}-\frac{48x}{16}=6240-48x$$

$$17x=6240-48x$$

$$65x=6240$$

$$x=\frac{6240}{65}=96$$

Man kann auch in diesen General-Nenner sogleich mit den Nennern dividiren, die Coefficienten aber damit multipliciren.

Z. B. (6)

$$\frac{x}{2}-\frac{x}{3}+4=25-x$$

$$3x-2x+24=150-6x$$

$$3x-2x+6x=150-24$$

$$7x=126$$

$$x=\frac{126}{7}=18.$$

Man kann auch vor jedes Glied alle Nenner mit dem Multiplicationszeichen vorsetzen, so siehet man bald, was sich aufhebt.

Z. B. $\frac{x}{3}+\frac{x}{2}=10$

$$\frac{3.2.x}{3}+\frac{3.2.x}{2}=3.2.10.$$

$$2x+3x=3.2.10.$$

$$5x=60$$

$$x=\frac{60}{5}=12.$$

§. 9.

§. 9.

Wenn man die in Zahlen bekannte Grössen durch Buchstaben bezeichnet, so erhält man den Vortheil, daß man am Ende den Werth von x in einer Grösse erhält, deren Entstehung und Zusammensetzung auf das deutlichste in die Augen fället; wo im Gegentheil, wenn man mit Zahlen rechnet, solche leicht in einander einschmelzen, daß man am Ende nicht weißt, aus welchen Theilen und durch welche Rechnungsarten diese Grösse entstanden ist. Deswegen hat man von diesen Ausdrücken in Buchstaben den Vortheil, daß sie Formeln abgeben, d. i. die Entstehungsart einer Grösse auf das deutlichste und vollständigste lehren.

Z. B. es sey $a : b = c : x$ eine geometrische Proportion; wäre das hinterste Glied unbekannt, so lehret eine solche Auflösung in Buchstaben dasselbe finden:

$$a : b = c : x$$
$$ax = bc$$
$$x = \frac{bc}{a}$$

Der Anblick gibt die Regel, man müsse das erste Glied in das Produkt der mittleren dividiren.

Oder: das 3te Glied wäre unbekannt, so setze man:

$$a : b = x : d$$
$$ad = bx$$
$$\frac{ad}{b} = x$$

d. i. man muß das erste und vierte Glied mit einander multipliciren, und mit dem zweyten Gliede darein dividiren.

Die Erfindung solcher Formeln ist einer der wesentlichsten Dienste, den die Analysis sowohl der reinen als besonders auch der angewandten Mathematik und der Naturlehre leistet, indem sie mit wenigen Zeichen viele und oft verwickelte Sätze deutlich darstellt.

§. 10.

Wenn in einer Gleichung eine unbekannte Grösse etlichemal vorkommt, es sey auf einer, oder auf beyden Seiten, so muß sie zusammengebracht werden. Wenn sie also auf beyden Seiten der Gleichung stehet, so muß man beurtheilen, von welcher Seite sie durch Verwechslung der Zeichen am schicklichsten hinweggebracht werden könne, um einen positiven Werth herauszubringen.

Z. B.

$$4x - a + x = b$$
$$5x - a = b$$
$$5x = b + a$$
$$x = \frac{b + a}{5}$$

*)

$$x - c = \frac{a + x}{2}$$
$$2x - 2c = a + x$$
$$2x - x = a + 2c$$
$$x = a + 2c$$

*)

$$\frac{3x - b}{2} = \frac{5x - c}{3}$$
$$\frac{9x - 3b}{2} = 5x - c$$
$$9x - 3b = 10x - 2c$$
$$-3b = 10x - 9x - 2c$$
$$2c - 3b = x.$$

§. 11.

Die Glieder (Termini) einer Aequation heissen ähnlich oder gleichartig, wenn sie einerley Buchstaben in einerley Potenz haben, die Coefficienten mögen beschaffen seyn, wie sie wollen.

Z. B.

Z. B. in $5abc + df - 6abc = 3b^2x + df - 4b^2x$ sind $5abc$ und $-6abc$, wie auch $3b^2x$ und $-4b^2x$ ähnliche Glieder.

Wenn ähnliche Glieder der Gleichung auf einerley Seiten einerley Coefficienten, aber entgegengesezte Zeichen haben, so heben sie einander auf, und werden gar weggeworfen.

Z. E. aus $2bc + mb - 2bc = mc - hf + cf + hf$, wird $mb = mc + cf$.

Wenn die ähnliche Glieder entgegengesezte Zeichen, aber ungleiche Coefficienten haben, so wird das Kleinere vom Grösseren abgezogen, und dem Rest das Zeichen des Grösseren gegeben.

Z. B.

$$15ab - cd - 4ab + 5cd = ac - cd + ab - 4ac$$
$$11ab + 4cd = ab - cd - 3ac$$

Wo kein Zeichen stehet, wird +, und wo kein Coefficient steht, wird 1 dabey verstanden.

Haben sie ungleiche Coefficienten, aber gleiche Zeichen, so zählt man sie schlechtweg zusammen, und lässet das vorige Zeichen.

Z. B. $10b - 5a + 50b - 3a = 3a + 5a - c$.

$$60b - 8a = 8a - c$$

§. 12.

Substituiren heißt in der Buchstabenrechnung, und den Gleichungen, eine mehrtheilige Grösse (Quantitatem Complexam), die demnach aus mehreren Gliedern bestehet, und meistentheils aus bekannten Theilen, welche als Faktoren mit einer unbekannten Grösse verbunden sind, durch einen einzigen beliebigen Buchstaben zu Abkürzung des Calculs ausdrücken.

Es sey der Ausdruck $ax + bx - cx$, so sind a, b, und c bekannt: man substituire also für $a + b - c$ den Buchstaben m, so erhält man den geschmeidigeren Ausdruck mx.

Ist mit einer unbekannten Grösse nicht ausdrücklich ein anderer Faktor multiplicirt, so ist doch in der Substitution 1 vorauszusetzen: denn jede Grösse einfach genommen, ist so viel, als wäre sie mit 1 multiplicirt.

Z. B. $x + xb = c$

$$x(1 + b) = c$$

$$x = \frac{c}{1 + b}$$

Noch gibt es eine Substitution, die sich zu gänzlicher Wegschaffung einer unbekannten Grösse in einer Gleichung anbringen lässet, indem man für sie ihren anderwärts gefundenen Werth setzet. Man sehe die 2te Abtheilung §. 16. Auch werden unten bey der Anleitung zu einer geschickten Benennung noch merkwürdige Arten nützlicher Substitutionen gelehret werden.

§. 13.

Da so sehr vieles daran gelegen ist, den Nutzen der Gleichungen, und wie sie zu Erfindung der Lehrsätze dienen, recht einzusehen, so sollen noch einige weitere Beyspiele hievon folgen.

Man soll erweisen, daß bey der Multiplication gleiche Zeichen der Faktoren im Produkt +, und ungleiche Zeichen im Produkt — geben.

1.) Daß + mit + multiplicirt im Produkt + gebe, ist vor sich klar.

2.) Man solle nun finden, was + mit — multiplicirt, hervorbringe.

Es

Es sey $a - b$ mit $+ c$ zu multipliciren.

Man bediene sich des schon angezeigten Vortheils der Substitution und heisse $a - b$ zusammen $= m$, so ist

$$(a - b) c = mc$$
$$a - b = m$$
$$a = m + b$$

Dieses multiplicire man nun wieder mit c, welches keine Schwürigkeit hat, indem alle Grössen + erhalten.

$$ac = mc + bc$$
$$ac - bc = mc$$

Also gibt $- b$ mit $+ c = - bc$.

3.) Man soll finden, was — mit — multiplicirt im Produkt hervorbringe?

Es sey $a - b$ mit $- c$ zu multipliciren.

Man substituire abermal:

$(a - b) = m$, so ist

$(a - b) - c = - mc$, nach dem vorigen.

$$a - b = m$$
$$a = m + b$$
$$ac = mc + bc$$
$$ac - mc = bc$$

Es gibt also $- b$ mit $- c$ multiplicirt im Produkt $+ bc$.

Nun solle man eben diese Regeln auch bey der Division erweisen.

1.) Man solle $- a$ mit $- a$ dividiren. So ist

$$\frac{-a}{-b} = m$$
$$-a = -bm$$

$$bm = a$$
$$m = \frac{a}{b}$$

also gibt — durch — dividirt, im Quotienten +.

2.) Es sey + a mit — b zu dividiren; so ist

$$\frac{+a}{-b} = m$$

$$+a = -bm$$

$$bm = -a$$

$$m = \frac{-a}{+b}$$ also bekommt der Quotient —.

Man kann diese Regeln bey der Division auch per consequentiam aus den Regeln der Multiplication erweisen:

Da ac — bc aus der Multiplication von a — b mit + c entstanden, so muß $\frac{ac - bc}{c}$ auch wieder a — b geben, also

$$\frac{-bc}{+c} = -b$$

Und, da — ac + bc aus der Multiplication von a — b mit — c entstanden, so muß $\frac{ac - bc}{-c}$ auch wieder a — b geben: also

$$\frac{+bc}{-c} = -b$$

$$\frac{-ac}{-c} = +a.$$

Zweyte

Zweyte Abtheilung.

Von Einfachen Gleichungen mit zwey, drey und mehreren unbekannten Grössen.

§. 14.

Gleichungen, welche Zwey Unbekannte Grössen enthalten.

Aus einer Gleichung, welche zwey unbekannte Grössen enthält, z. B. $x + y = a$, kann keine derselben gefunden werden, es sey dann, daß noch eine andere Gleichung gegeben sey, worinnen eben diese unbekannte Grössen vorkommen, und welche zugleich nicht aus der vorigen Gleichung hergeleitet ist. Z. B. es sey die andere Gleichung $\frac{x}{y} = b$.

Nun gibt es einige Wege, eine von diesen unbekannten Grössen herauszufinden, worauf sich die andere leicht und von selbst ergibt.

§. 15.

Erste Auflösungs-Art.

Es seyen die Gleichungen:

$x + y = a$ und $fx + dy = b$

Man bringe in beyden Aequationen einerley unbekannte Grösse auf eine Seite allein.

$x = a - y$ und $fx = b - dy$

$x = \frac{b - dy}{f}$

Nun hat man zweyerley Ausdrücke für x, die man demnach in eine neue Aequation zusammen setzen kann:

a —

$$a - y = \frac{b - dy}{f}$$

$$af - fy = b - dy$$

$$-fy = b - dy - af$$

$$dy - fy = b - af$$

$$y = \frac{b - af}{d - f}$$

*) oder, man hätte auch vorhin y auf beyden Seiten suchen können:

$$y = a - x \qquad dy + fx = b$$

$$dy = b - fx$$

$$y = \frac{b - fx}{d}$$

$$a - x = \frac{b - fx}{d}$$

$$ad - xd = b - fx$$

$$ad + fx - xd = b$$

$$fx - xd = b - ad$$

$$x = \frac{b - ad}{f - d}$$

§. 16.

Zweyte Auflösungs-Art.

Nachdem x aus einer Gleichung allein erhalten worden, so setze man seinen erhaltenen Ausdruck, statt seiner, in die andere Gleichung, ohne vorhin diese leztere Gleichung zu verändern.

Man erhielte im vorigen Beyspiel $x = a - y$ diesen Werth substituire man in der anderen Gleichung $fx + dy = b$ für x, so kommt

$$f(a - y) + dy = b$$

$$af - fy + dy = b$$

$$dy - fy = b - af$$

$$y = \frac{b - af}{d - f} \quad \text{wie vorhin.}$$

Wenn

Wenn eine Gleichung verwickelter als die andere ist, so kann man diese Auflösungsart mit Vortheil gebrauchen, wenn zuerst aus derjenigen Gleichung, welche am wenigsten verwickelt ist, der Werth von x gesucht wird.

§. 17.

Dritte Auflösungsart.

Man kann beyde Gleichungen allemal so verändern, daß sie unter folgenden allgemeinen Ausdrücken begriffen sind:

$$mx + ny = a$$
$$fx + dy = b$$

Wo m und n beliebig aus den bekannten Grössen zusammengesetzt seyn können. Will man nun x wegschaffen, so multiplicire man jede Gleichung mit dem Coefficienten, womit x in der anderen Gleichung multiplicirt ist:

also $mx + ny = a$ mit f
und $fx + dy = b$ mit m
so kommen: $mfx + nfy = af$
und $mfx + mdy = mb$

Nun subtrahire man die eine Gleichung von der anderen, so kommt

$$(nf - md)\,y = af - mb$$

oder auch $(md - nf)\,y = af - mb$.

*(Wäre $ny + mx = a$
$dy - fx = b$

so erhielte man, das einemal mit $-f$, und das anderemal mit $+m$ multiplicirt,

$$-nfy - mfx = -af$$
$$mdy - mfx = mb$$

und diese Gleichungen subtrahirt

$$(md + nf)\,y = mb + af$$

Wollte man die erste Gleichung nicht mit $-f$, sondern mit $+f$ multipliciren, so müßte man die beyden neuen Gleichungen addiren, um x wegzuschaffen.

§. 18.

Drey und mehrere unbekannte Grössen zu finden.

Man muß eben so viele Gleichungen haben, als unbekannte Grössen gefunden werden sollen; und sie werden heraus gebracht, wenn man wie vorhin nach und nach dieselben, bis endlich auf eine, aus den Gleichungen wegschafft.

Z. B. Es seyen die Gleichungen

$$x + y = a \qquad x + z = b \qquad fx + hy = z$$

man solle x und y und z finden.

Aus beyden ersten schaffe man x weg

$$x = a - y \qquad x = b - z$$

$$a - y = b - z.$$

Aus einer der beyden ersten, und der 3ten schaffe man ebenfalls x weg

$$x + z = b \qquad fx + hy = z$$

$$x = b - z \qquad fx = z - hy$$

$$x = \frac{z - hy}{f}$$

$$b - z = \frac{z - hy}{f}$$

Aus dieser und der vorigen Gleichung $a - y = b - z$ schaffe man y weg

a —

$$a - y = b - z$$
$$a + z - b = y$$

$$b - z = \frac{z - hy}{f}$$
$$bf - fz = z - hy$$
$$bf - fz - z = - hy$$
$$hy = fz + z - bf$$
$$hy = (f + 1)z - bf$$
$$y = \frac{(f + 1)z - bf}{h}$$

so kann man nun beyde Ausdrücke von y zusammen setzen, welche nur z allein enthalten.

$$\frac{(f + 1)z - bf}{h} = a + z - b$$
$$(f + 1)z - bf = ah + hz - bh$$
$$(f + 1)z - hz = ha - bh + bf$$
$$([f + 1] - h)z = ha + bf - bh$$
$$z = \frac{ha + bf - bh}{(f + 1) - h}$$

Dritte Abtheilung.

Bildung von Proportionen aus Gleichungen, und umgekehrt, nebst beyläufiger Nachricht von einigen bey Verhältnissen vorkommenden Benennungen.

§. 19.

Es ist äusserst nöthig und nüzlich, sich eine Fertigkeit zu erwerben, eine vorgegebene Gleichung in eine geometrische Proportion zu verwandlen, oder anzugeben, welche, und wie viele geometrische Proportionen eine Gleichung enthalte.

Also, wenn 2 Produkte einander gleich sind, so kann jedesmal aus ihnen eine geometrische Proportion gemacht werden, so daß das eine Produkt die mittleren Glieder, und das andere Produkt die äusseren Glieder enthält.

Z. B. $ad = bc$

man dividire mit bd

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$a : b = c : d$$

* Man siehet also, daß zwey gleichviel besagende Brüche jedesmal eine geometrische Proportion ausmachen.

*) $mn = pq$
$m : p = q : n$
oder $m : q = p : n$
oder $q : m = n : p$
oder $n : q = p : m$

wenn nur jedesmal das Produkt der äussern und das Produkt der mittleren Glieder $mn = pq$ gibt.

Wenn auf der einen Seite der Gleichung keine zusammengesezte Grösse wäre, so substituirt man 1 zum Faktor.

Z. B. $a = dc$
$1a = dc$
daraus folgt,
$1 : d = c : a$
$1 : c = d : a$ ꝛc.

*) $bm + gm = bg + mg$
gibt
$b + g : g = b + m : m$

*) $ad - bd = cg + c$
gibt
$a - b : g + 1 = c : d$

*) $\delta = \frac{igebc}{hfda}$
enthält die Proportionen:
$d : c = g : \alpha$
$f : i = \alpha : \beta$
$h : b = \beta : \gamma$
$a : e = \gamma : \delta$

 *) $\delta =$

*) $\delta = \frac{bc}{hfde}$

enthält, (oder ist zusammengesezt aus)

$h : b = c : \alpha$
$f : 1 = \alpha : \beta$
$d : 1 = \beta : \gamma$
$e : 1 = \gamma : \delta$

*) $1 - x^2 = a$
gibt
$1 - x : a = 1 : 1 + x$

*) $x^2 - y^2 = 1$
gibt $x + y : 1 = 1 : x - y$

§. 20.

Anfänger haben sich vornemlich folgende verschiedene Benennungen der Verhältnisse bekannt zu machen, ohne deren Kenntniß sie ohnehin in lateinischen Schriften über Physik und Mathematik nicht fortzukommen vermögen.

Eine Grösse ist gegen die andere in *Ratione simplici* $c : t$ oder in *Ratione composita* $s : ct$.

In *Ratione Duplicata*, wenn eine sich verhält, wie das Quadrat der anderen $s : c^2$.

In *Ratione Triplicata*, wenn eine sich verhält, wie der Cubus der anderen $s : c^3$.

In *Ratione Subduplicata*, wenn sich eine verhält, wie die Quadratwurzel der anderen. $s : \sqrt{c}$.

In *Ratione Subtriplicata*, wenn eine sich verhält, wie die Cubikwurzel der anderen. $s : \sqrt[3]{c}$.

Man verwechsle aber Duplicatum, Subduplicatum &c. ja nicht mit *Duplum*, *Sub-*

Subduplum &c. z. B. s ist duplum des c, wenn es noch einmal so gros ist, und s ist das Subduplum von c, wenn $s = \frac{1}{2}c$.

Ratio Directa ist, wenn eine Grösse nach gleichen Gesetzen mit einer anderen Grösse zugleich wächst, oder zugleich mit ihr abnimmt. $s = c$.

Ratio Inversa ist, wenn beym Wachsthum der einen Grösse die andere abnimmt. $c = \frac{1}{t}$ da ist c in ratione inversa oder *reciproca* des t.

$v = \frac{1}{d^2}$. v ist in *ratione inversa duplicata* des d.

$c = \frac{s}{t}$. Ist einerley mit $c = s.\frac{1}{t}$. Also c ist in *Ratione composita ex directa simplici* des s, und der *inversa simplici* des t.

$v = \frac{m}{d^2}$. v ist in *Ratione composita ex directa simplici* des m, und *inversa duplicata* des d.

$c = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{d}}$. c ist in *Ratione composita ex directa subduplicata* des e, und *inversa subduplicata* des d.

$c = \frac{e^2}{\sqrt{d}}$. c ist in *Ratione composita ex directa duplicata* des e, und *inversa subduplicata* des d.

Weniger häufig kommen folgende vor, die ich aber doch nach *Poetius* S. 384. f. anführe.

Eine grössere Zahl hält eine kleinere nur auf 5erley Weise in sich.

1.) Einmal, und einen einzigen Theil der kleineren darüber. Z. B. 4 : 3; heißt *Ratio superparticularis*. (übertheilige Verhältniß) Wird im Lateinischen durch sesqui und die kleinere Ordnungszahl ausgedrückt. 4 : 3 heißt ratio sesquitertia. In der Musik ist ein Ton gegen seinen folgenden = 9 : 8 = ratio sesquioctava.

2.) Einmal, und mehrere Theile der kleineren darüber. Z. B. 5 : 3. heißt *Ratio superpartiens*. Wird im Lateinischen durch super, mit dem nomine adverbiali der übrigen Theile, und der Ordnungszahl des kleineren Termini ausgedrückt. Z. E. 7 : 4 ist in ratione supertripartiente quartas, i. e. partes.

3.) Oder mehrmal ganz genau und nichts darüber. Z. B. 15 : 3; heißt Ratio multiplex. (Vielfache Verhältniß.) Heißt von dem herauskommenden Quotienten: Dupla, Tripla &c. 9 : 1. ist Ratio noncupla.

4.) Oder mehrmal, und noch einen einzigen Theil darüber. 7 : 3. Der Name wird aus n. 1. und 3 zusammengesetzt. *Ratio multiplex superparticularis*. (Eine vielfache übertheilige Verhältniß.) Z. B. zwischen der Peripherie und dem Diameter ist nach dem Archimedes Ratio tripla sesquiseptima = 22 : 7.

5.) Oder mehrmals, und noch mehrere Theile der kleinern darüber. Z. B. 11 : 3. Der Name wird aus der 3ten und 2ten Art zusammengesetzt. *Ratio multiplex superpartiens*. (Die vielfach übertheilende Verhältniß.) Z. B.

das

das Zinn ist gegen sein Gewicht, so es im Wasser verliert, in ratione septupla superbipartiente quartas. $=37:5$. (37 ℔. wägen im Wasser nur 32 ℔.)

Daher, wenn m, n, r verschiedene ganze Zahlen, (nemlich jede grösser als 1) und $n > r$, primi inter se sind, so kommen die Symbola rationum universalia:

1.) $n : n - 1$. Ratio superparticularis.
2.) $n + r : n$. Ratio superpartiens.
3.) $mr : r$ oder $m : 1$. Ratio multiplex.
4.) $mr + 1 : r$. multiplex superparticularis.
5.) $mn + r : n$. multiplex superpartiens.

Zweytes Kapitel.

Anwendung der Gleichungen auf analytische Auflösung arithmetischer Aufgaben.

Erste Abtheilung.

Bestimmte arithmetische Aufgaben.

§. 21.

Die bey einer vorgelegten Aufgabe vorkommende Hauptregeln sind folgende:

1.) Man hat die Beschaffenheit der Frage mit der gehörigen Aufmerksamkeit zu überlegen, daß die einzelne Bedingungen und das Bekannte und Unbekannte aus einander gesezt werden.

2.) Man bedienet sich eines allgemeinen Ausdrucks, der nicht an eine gewisse Gattung von Grössen allein gebunden ist; und erhält dieses, wenn man Buchstaben gebraucht, davon man nicht mehrere wählet, als nöthig ist. Deswegen werden einerley oder gleiche Grössen, oder Theile von gleichen Grössen nicht durch verschiedene Buchstaben ausgedrückt, sondern man gibt einerley Buchstaben, wenn sich dieser Fall ereignet, nur die gehörige Nenner und Coefficienten.

Z. B. Es wäre eine unbekannte Grösse 3mal grösser als eine andere unbekannte, so nenne man die eine x und die andere 3x, oder eine unbe-

unbekannte Grösse verhielte sich zur andern wie m : n, so nennte man sie $\frac{nx}{m}$. (Denn dieses folgt aus m : n = x : y).

3.) So viele einzelne Bedingungen mit der Aufgabe verbunden sind, so viele einzelne Gleichungen werden erfordert, und zu Vollendung einer Auflösung sind so viele Gleichungen nöthig, als unbekannte Grössen zu suchen sind.

Z. B. Ein Vater hat einen Sohn, der 30 Jahre jünger ist, als er; sollte man aber das Alter von beyden addiren, so kämen 100 Jahre heraus. Man fragt nach beyderley Alter.

Auflösung. Man siehet, daß in dieser Aufgabe 2 Grössen gegeben sind, nemlich 100, und 30. Und 2 Grössen sind zu suchen, nemlich das Alter des Vaters und das Alter des Sohns. Es sind auch 2 Bedingungen da, nemlich daß beyderley Alter zusammen = 100, und die Differenz = 30. Man drückt also beyde Bedingungen durch besondere Gleichungen aus, und sezt:

100 = a. 30 = b. Vaters Alter = x
Sohns Alter = y und erhält

$x + y = a$ und $x - y = b$.

Nun kann man durch Substitution den Werth von der einen oder der anderen unbekannten Grösse suchen. Z. B. von y

$x = a - y \qquad x = b + y$

$b + y = a - y$

$b + 2y = a$

$2y = a - b$

$$y = \frac{a - b}{2} = \frac{100 - 30}{2} = \frac{70}{2} = 35$$

oder

oder x, so kommt

$$y = a - x \qquad y = x - b$$

$$x - b = a - x$$

$$2x - b = a$$

$$2x = a + b$$

$$x = \frac{a + b}{2}$$

§. 22.

Wenn man diesen Specialfall genau betrachtet, so kann man leicht eine Generalaufgabe daraus formiren: Nemlich,

Aus der gegebenen Summe und Differenz zweyer Grössen die Grössen selbst zu finden.

Und auf diese Art kann die in Buchstaben, als allgemeinen Ausdrücken, gefundene Auflösung auch als eine allgemeine Auflösung und General-Lehrsatz über jene Frage angesehen werden.

Ist nemlich die Summe beyder Grössen $= a$, die Differenz $= b$, die grössere $= x$, die kleinere $= y$, so gibt die doppelte Finalgleichung

$$x = \frac{a + b}{2} \text{ oder } \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b$$

$$y = \frac{a - b}{2} \text{ oder } \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b$$

den Lehrsatz:

1.) Wenn man zu der halben Summe zweyer Grössen die halbe Differenz addirt, so kommt die grössere Zahl heraus.

2.) Wenn man von der halben Summe zweyer Grössen die halbe Differenz subtrahirt, so bleibt die kleinere übrig.

Solche

Solche Aequationen, welche Generalauflösungen der Aufgaben enthalten, nennet man Formuln, da sie die allgemeine Methode an die Hand geben, alle mögliche Aufgaben aufzulösen, welche gleiche Bedingungen haben.

Z. B. Petrus und Johannes geben 14 fl. aus; Petrus 4 fl. mehr, als Johannes; es fragt sich, was beyde hatten?

$x =$ Petrus $= 9$. $y =$ Johannes $= 5$.

Anmerk. Man könnte übrigens obige Aufgabe auch noch kürzer auflösen, und weil beyde unbekannte Grössen einander determiniren, nach dem vorigen §. 21. Reg. 2. nur eine einzige unbekannte Grösse annehmen.

Es sey x, die Differenz $= d$, die Summe $= s$.

Ist nun die kleinere Zahl $= x$

so ist die grössere $= x + d$

und addirt, $2x + d = s$

$$2x = s - d$$

$$x = \frac{s - d}{2} = \text{kleine Zahl.}$$

Ferner: $x = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}d$

$$+ d$$

$$\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}d = \text{grössere Zahl.}$$

Mehrere Beyspiele von allgemeinen Auflösungen, oder wenigstens besonderen Klassen von Aufgaben.

§. 23.

Man solle eine gegebene Zahl dergestalt in 2 Theile theilen, daß wenn man den einen Theil mit m, und

und den andern mit n multiplicirt, die beyden Produkte einander gleich sind.

Aufl. Der Theil, der mit m multiplicirt werden solle $= x$

der andere $= a - x$.

das Produkt x mit m $= xm$.

n mit $a - x = an - xn$.

$$mx = an - nx$$

$$mx + nx = an$$

$$(m + n)x = an$$

$$x = \frac{an}{m + n}$$

Nach dieser Generalformul können unzählige Aufgaben aufgelöst werden, bey denen eine gewisse Zahl eben so getheilt werden solle, und wo die Zufälligkeiten weggelassen werden.

Z. B. Zwey Kaufleute haben ein Kapital von 1800 fl. zusammengelegt. Nach Verlauf von einiger Zeit haben beyde gleichviel gewonnen, und der Gewinst des ersten ist 3mal so groß, als seine eingelegte Summe; der Gewinst des 2ten aber 5mal so groß, als seine eingelegte Summe; wie viel hat jeder eingelegt?

Wenn $x =$ Einlage des ersten, so ist
$1800 - x =$ Einlage des zweyten.
Und wenn $a = 1800$, $m = 3$, $n = 5$, so ist nach obiger Formul

$$x = \frac{5 \cdot 1800}{3 + 5} = \frac{9000}{8} = 1125$$

*) Man

*) Man löset die Aufgabe gemeiniglich also auf:

x = Einlage des ersten.

1800 — x = Einlage des zweyten.

3x = Gewinst des ersten.

(1800—x)5 = Gew. des andern. = 9000—5x

$$3x + 5x = 9000$$

$$8x = 9000$$

$$x = \frac{9000}{8} = 1125.$$

*) Zwey Spieler machen einen Vertrag, es solle nach der zusammengebrachten Summe von 300 fl. der erste 6mal so viel bekommen, als sein Einsatz, und der andere 10mal so viel. Nach geendigtem Spiel haben beyde gleich viel gewonnen; was war die Einlage eines Jeden?

Aufl. Sie war 125 und 175.

§. 24.

Man sucht eine Zahl, welche zu Bestimmung einer ebenfalls unbekannten, wenn sie etliche bestimmte male genommen wird, etwas bestimmtes zu wenig, und wenn sie weiter genommen wird, etwas bestimmtes zu viel gibt.

Die Zahl = x

das erste etlichemal = a

das zu wenige = c

das zweyte etlichemal = b

das zu viele = d

So ist $ax + c = bx - d$

$$ax + c + d = bx$$

$$c + d = bx - ax$$

$$\frac{c + d}{b - a} = x.$$

Regul.

Regul. 1.) Man addiret, was in einem Fall zu wenig, und im andern Fall zu viel gegeben worden.

2.) Man subtrahirt die geringere Zahl des Werths von der grösseren.

3.) Man dividirt n. 1. durch n. 2.

Z. B. Man setze eine Waare, welche jemand auf eine gewisse Summe herausspielen lässet. Kostet 1 Loos 5 fl. so kommen 42 fl. zu wenig; kostet aber ein Loos 6 fl. so kommen 58 fl. zu viel. Es fragt sich, wie viele Loose es seyn müssen, daß es gerade aufgeht, und welches die Summe sey, bey der es aufgeht?

Zahl der Loose $= x$

$$5x + 42 = 6x - 58$$

$$42 = x - 58$$

$$42 + 58 = 100 = x$$

folglich die Summe $= 500 + 42 = 542$;

oder $600 - 58 = 542$.

Kürzer nach der Formul

$$\frac{c + d}{b - a} = x = \frac{42 + 58}{6 - 5} = 100.$$

*) Eine Mutter hat Aepfel; giebt sie jedem ihrer Kinder 6, so hat sie 5 übrig; gibt sie aber 7, so hat sie 3 zu wenig.

$a = 6,\ b = 7,\ c = 3,\ d = 5$

$$\frac{c + d}{b - a} = \frac{3 + 5}{7 - 6} = 8 \text{ Kinder.}$$

$6 . 8 + 5 = 53$ Aepfel.

oder $7 . 8 - 3 = 53$.

§. 25.

Mehrmal erfordert die erste Gleichung einer Aufgabe noch gewisse Umstände vorher, und sezt gewisse Vorbereitungen voraus, ehe sie formirt werden kann. Z. B.

Wenn

Wenn das Unbekannte mehrmal, und unter einzelnen besonderen Bestimmungen zusammen zu nehmen ist; so drückt man diese einzelnen Bedingungen aus, und rechnet die Resultate zusammen.

Z. B. Man soll 36 fl. dergestalt unter 6 Personen vertheilen, daß jedesmal die nächstfolgende Person 1 fl. weiter, als die nächstvorhergehende bekomme.

x = dem ersten Theil.

$a = 36$ fl.

$$\begin{array}{l} x \\ x+1 \\ x+2 \\ x+3 \\ x+4 \\ x+5 \\ \hline 6x+15=a \\ x=\dfrac{a-15}{6}=3\tfrac{1}{2} \end{array}$$

Probe:

$$\begin{array}{l} 3\tfrac{1}{2} \\ 3\tfrac{1}{2}+1 \\ 3\tfrac{1}{2}+2 \\ 3\tfrac{1}{2}+3 \\ 3\tfrac{1}{2}+4 \\ 3\tfrac{1}{2}+5 \\ \hline 21+15=36. \end{array}$$

*) Vier Soldaten haben 112 fl. also zu theilen, daß jederzeit der folgende 2mal so viel, und noch 2 fl. weiter, als der vorhergehende bekomme.

$$\begin{array}{l} x \\ 2x+2 \\ 4x+4+2 \\ 8x+8+4+2 \\ \hline 15x+22=112 \\ 15x=112-22=90 \\ x=\dfrac{90}{15}=6 \end{array}$$

Probe:

$$\begin{array}{l} A=6 \\ B=14 \\ C=30 \\ D=62 \\ \hline \text{Summe}=112. \end{array}$$

*) Es hat jemand 3 Scheffel Dinkel mehr, als Haber, und 2 Scheffel Rocken mehr als Dinkel, und in allem 44 Scheffel; wie viel hat er von jeder Sorte?

Haber $= x$
Dinkel $= x + 3$
Rocken $= x + 3 + 2$

$$3x + 8 = 44$$
$$3x = 44 - 8$$
$$x = \frac{36}{3} = 12. = \text{Haber.}$$

Er hat also 12 Scheffel Haber.
folglich 15 Scheffel Dinkel
und 17 Scheffel Rocken.
Summe = 44 Scheffel.

§. 26.

Oefters hat man die Theile, welche eine Seite der Gleichung ausmachen, durch die gewöhnliche Proportionen Regul (Regulam Trium) vorher zu suchen, ehe man sie zusammen sezen kann.

Z. B. Wenn der Scheffel Dinkel 6 fl. und der Scheffel Haber 5 fl. gilt, und man will beyderseits gleichviele Scheffel haben; so fragt sich, wie viel man von jeder Sorte um 77 fl. bekomme?

1 Schl. Dinkel — 6 fl. — x Schl. D. $= 6x$
1 Schl. Haber — 5 fl. — x Schl. H. $= 5x$

folglich $6x + 5x = 77$
$$11x = 77$$
$$x = \frac{77}{11} = 7.$$ Also 7 Schl. Dinkel und 7 Schl. Haber.

Probe:

Probe: 7 Schl. Dinkel zu 6 fl. = 42 fl.
7 Schl. Haber zu 5 fl. = 35 fl.
Summe = 77 fl.

*) Wenn man noch einmal so viel neuen als alten Wein kauffen will, und der neue Wein 20 fl., der alte aber 45 fl. kostet, wie viel bekommt man von jeder Sorte um 255 fl.

1 Eym. Alt. — 45 fl. — $x = 45x$
1 Eym. N. — 20 — $2x = 40x$

$$45x + 40x = 255$$
$$85x = 255$$
$$x = \frac{255}{85} = 3$$ Eym. alt. Wein.
6 Eym. neuer.

Dann 3 Eym A. = 135
6 Eym. N. = 120
255 fl.

*) Es bezahlt jemand um 15 ℔ Butter und 9 ℔ Schmalz zusammen 8 fl. 27 kr. (507 kr.) und gibt um das ℔ Schmalz 3 kr. mehr, als um das ℔ Butter; wie hoch hat er beyderley ℔ bezahlt?

1 ℔ Butter = x 1 ℔ Schmalz = $x + 3$
1 ℔ B. — x kr. — 15 ℔ = $15x$
1 ℔ S. — $x + 3$ — 9 ℔ = $9x + 27$

$$15x + 9x + 27 = 507$$
$$24x = 507 - 27 = 480$$
$$x = \frac{480}{24} = 20 = 1$$ ℔ Butter. folgl.
$20 + 3 = 23 = 1$ ℔ Schmalz.

Denn 15 ℔ B. um 20 kr. = 300 kr.
9 ℔ S. — 23 kr. = 207
Summe 507 kr.

 *) Eine

*) Eine gewisse Garnison kostet täglich 6000 fl. und eine andere 7000 fl. Es fragt sich, in welcher Zeit beyde mit einander 78000 fl. kosten?

1 Tag — 6000 fl. — x T = 6000x

1 Tag — 7000 fl. — x T = 7000x

$$6000x + 7000x = 78000$$

$$13000x = 78000$$

$$x = \frac{78000}{13000} = 6 \text{ Tag.}$$

Denn $A = 6 . 6000 = 36000$

$B = 6 . 7000 = 42000$

Summe $= 78000.$

*) Es kauft jemand ein Stück Tuch, der Elle nach um 8 kr. und verkauft es wieder der Elle nach um 11 kr. und gewinnt 42 kr. es fragt sich, wie viele Ellen das Tuch gehalten?

1 Elle — 8 kr. — x = 8x Einkauf

1 Elle — 11 kr. — x = 11x Verkauf.

Es kommt aber der Gewinnst heraus, wenn man den Einkauf vom Verkauf abziehet. Folglich

$$11x - 8x = 42$$

$$3x = 42$$

$$x = \frac{42}{3} = 14 \text{ Ellen} = \text{das ganze Stück.}$$

*) Es solle jemand über 3 Jahre 460 fl. bezahlen: wenn er nun gleich jezt seine Schuld abtragen will, wie viel müßte er geben, daß solches Geld mit dem 3jährigen Zinß so viel als obige 460 fl. ausmache; den Zinß zu 5 Procent gerechnet?

das

das Geld $= x$. den 3jährigen Zinß findet man also:

$$\left.\begin{matrix}100 \text{ fl.}\\ 1 \text{ Jahr}\end{matrix}\right) - 5 \text{ fl.} - \left(\begin{matrix}x \text{ fl.}\\ 3 \text{ Jahr}\end{matrix}\right. = \frac{15x}{100}$$

Mithin $x + \frac{15x}{100} = 460$

$$100x + 15x = 46000$$
$$115x = 46000$$
$$x = \frac{46000}{115} = 400.$$

§. 27.

So kann man auch Vermischungen von verschiedenem Werth berechnen, um eine Mischung eines bestimmten Werths daraus zu erhalten.

Z. B. Man weißt den Preis einer Maaß von einer besseren und einer geringeren Sorte; man will wissen, wie viel von beyderley Gattung unter einander gemischt werden müsse, um die Maaß auf einen verlangten Preis zu bringen.

Der Theil vom guten $= x$
vom geringern $= 1 - x$
Preis des guten $= a$
des geringeren $= b$
mittlerer Preis $= c$.

Nun inferirt man:
1 Maaß vom guten kostet — a Preis; was kostet x? kommt ax
1 Maaß vom geringen — b Preis; was kostet $1 - x$? kommt $b - bx$

$$b - bx + ax = c$$
$$ax - bx = c - b$$
$$x = \frac{c - b}{a - b} \text{ vom besseren.}$$
$$1 - \left(\frac{c - b}{a - b}\right) = \frac{a - b - c + b}{a - b} = \frac{a - c}{a - b}$$
vom geringeren.

Z. B. $a = 32$ kr. $b = 18$ kr. $c = 24$ kr.

$$x = \frac{24 - 18}{32 - 18} = \frac{3}{7} = \text{ besserer.}$$
$$\frac{32 - 24}{32 - 18} = \frac{4}{7} = \text{ geringerer.}$$

Wenn es auf würklich bestimmte Theile von beyderley Sorten gehet, um ein bestimmtes Quantum von verlangtem Werth heraus zu bringen, so wird es nicht viel anders berechnet.

Z. B. Man will ein 15 aymeriges Faß mit zweyerley Wein füllen, davon der Aymer des geringeren 24 fl. und des besseren 42 fl. kostet; es fragt sich, wie viel man von beyden zu nehmen habe, daß der vermischte Aymer 30 fl. koste?

Die Formul ist:

$$\text{geringerer} = \frac{a - c}{a - b}$$
$$= \frac{42 - 30}{42 - 24} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

es ist aber $\frac{2}{3}$. $15 = 10$ Aymer.

$$\text{besserer} = \frac{c - b}{a - b}$$
$$= \frac{30 - 24}{42 - 24} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

es ist aber $\frac{1}{3}$. $15 = 5$ Aymer.

Oder,

Oder, man inserirt:

1 Aymer — 42 fl. — x = 42x
1 — — 24 fl. — 15 — x = 360 — 24x
1 — — 30 fl. — 15 = 450

$$42x + 360 - 24x = 450$$
$$18x = 90$$
$$x = 5 = \text{besserer.}$$
$$\text{folgl. } 15 - x = 10 = \text{geringerer.}$$

Probe: 5 Aym. zu 42 fl. = 210 fl.
10 — — 24 fl. = 240 fl.
—:· 450 fl.

Wäre Wasser, oder überhaupt eine Materie, welche nichts kostet, unter die vorige Materie zu mischen, so wird $b = 0$, folgl. $x = \frac{c - 0}{a - 0} = \frac{c}{a}$

Z. B. Es will jemand mit Wein, davon der Aymer 16 fl. kostet, und mit Wasser, ein aymeriges Faß füllen, und zwar so, daß man den Aymer davon für 12 fl. geben könne; es fragt sich, wie viel man von beyden zu nehmen habe?

$\frac{c}{a} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$ Aym. Wein oder 12 Imi.
folglich Wasser 4 Imi
—:· 16 Imi = 1 Aym.

oder:

Imi des Weins = x

$$16 \text{ Imi} - 16 \text{ fl.} - x \text{ Imi?} = \frac{16x}{16}$$

$$\text{folgl. } \frac{16x}{16} + 0 = 12$$
$$x + 0 = 12$$
$$x = 12.$$

Auf diesen nemlichen Gründen beruhet die Auflösung des Archimedes, da er die Krone des Königs Hiero untersuchte, wie viel Silber durch Betrug unter das Gold gemischt sey.

Die Auflösung kann auf doppelte Art geschehen:

1.) Man weiß, daß verschiedentlich schwere Körper verschiedenen Raum einnehmen, und also Wasser aus einem Gefäß in verschiedener Menge austreiben.

Z. B. Wenn das Gewicht der Krone war — = 100 ℔. = d
und ein Klumpen Gold von 100 ℔. aus einem Gefässe an Wasser austrieb = 20 Maaß = a
— — von Silber — = 36 Maaß = b
die Krone selbst — — = 24 Maaß = c
Gold = x
Silber = y

So kann man schliessen:

$$d - a - x = \frac{ax}{d}$$

$$d - b - y = \frac{by}{d}$$

$$x + y = d$$

$$x = d - y$$

$$\frac{ax}{d} + \frac{by}{d} = c$$

$$\frac{ax + by}{d} = c$$

$$ax + by = dc$$

$$x = \frac{dc - by}{a}$$

$$\frac{dc - yb}{a} = d - y$$

$$dc - yb = ad - ay$$

$$dc - ad = yb - ay$$

$$\frac{dc - ad}{b - a} = y$$

$$y = \frac{2400 - 2000}{36 - 20} = 25 = \text{Silber.}$$

$$x = 75 = \text{Gold.}$$

$$75 + 25 = 100 \text{ ℔.}$$

2.) Oder, man weißt auch, wie viel verschiedene Materien von gleicher Schwere ausserhalb des Wassers, hernachmals, wenn sie ins Wasser gebracht werden, von ihrer Schwere verlieren.

Z. B. Die ganze Krone wäge = d
sie verliere im Wasser = f
das schwerere Metall von gleichem Gewicht verliere = a
das leichtere = b

Man setze nun den vorhandenen Theil der leichteren = x,
so ist der vorhandene Theil der schwereren = d — x.

Man findet nun ferner, was in der Vermischung beyderley Theile verlieren:

$$d - b - x = \frac{bx}{d}$$

$$d - a - d - x = \frac{ad - ax}{d}$$

$$\frac{bx}{d} + \frac{ad - ax}{d} = f$$

$$\frac{(bx + ad - ax)}{d} = f$$

$$bx + ad - ax = df$$

$$bx - ax = df - ad$$

$$(b - a)x = df - ad$$

$$x = \frac{df - ad}{b - a}$$ = vorhandene leichtere Materie.

folglich die schwerere:

$$d - \frac{(df - ad)}{b - a}$$

$$\frac{bd - ad - df + ad}{b - a}$$

$$\frac{bd - df}{b - a}$$ = schwerere vorhandene Materie.

Wenn die Krone = 18 ℔.
ihr Verlust im Wasser = $1\frac{1}{3}$ ℔. = $\frac{4}{3}$ ℔.
Wenn 18 ℔. Gold im Wasser verlieren = 1 ℔.
18 ℔. Silber —— = $1\frac{1}{2}$ ℔. = $\frac{3}{2}$ ℔.

so enthält die Krone
Gold = 6 ℔.
Silber = 12 ℔.

§. 28.

§. 28.

Zur Uebung mögen auch folgende Aufgaben dienen, worinnen die Vergleichung von Räumen und Zeiten vorkommen.

*) Zwey Personen reisen von 2 Städten zu gleicher Zeit ab, und gerade einander entgegen; A macht täglich 6 und B $7\frac{1}{2}$ Meilen; wenn sie nun in 8 Tagen zusammen kommen, so fragt sich, wie weit beyde Städte von einander entlegen seyen?

$x = ac + bc = 108$ Meilen.

$x =$ Meilen der Distanz.
$a = 6$
$b = 7\frac{1}{2}$
$c = 8.$

*) Zwey Boten gehen von 2 Städten, welche 100 Meilen von einander liegen, zu gleicher Zeit gegen einander aus. Wenn nun A täglich $5\frac{3}{4}$ Meilen und B $6\frac{1}{2}$ gegangen sind, so fragt sich, in wie viel Tagen sie zusammengetroffen?

$$xb + xc = a$$
$$x = \frac{a}{b+c} = \frac{100}{12\frac{1}{4}} = 8\tfrac{8}{49} \text{ Tage.}$$

$x =$ Tage.
$a = 100$
$b = 5\frac{3}{4}$
$c = 6\frac{1}{2}$

Probe:

— M.	$8\frac{8}{49}$ T.
1 T.	$5\frac{3}{4}$ M.
$46\frac{46}{49}$ M.	

— M.	$8\frac{8}{49}$ T.
1 T.	$6\frac{1}{2}$ M.
$53\frac{3}{49}$ M.	

$$46\tfrac{46}{49} + 53\tfrac{3}{49} = 100.$$

*) Zwey

*) Zwey Boten gehen einander nach. A ist 5 Tage voraus; den hohlt B, welcher täglich $7\frac{1}{2}$ Meilen gehet, in 15 Tagen ein; wie viele Meilen ist A täglich gegangen?

$$xa + xc = bc$$
$$x = \frac{bc}{a+c} = 5\tfrac{5}{8} \text{ Meilen.}$$

x = Meilen von A.

a = 5	xa = Reise zum Voraus.
b = $7\frac{1}{2}$	xc = Reise mit B zugleich.
c = 15	bc = Reise des B.

*) Zwey Boten gehen einander nach. A geht täglich 6 und B $7\frac{1}{2}$ Meilen; wenn nun B den A in 24 Tagen einhohlt, so fragt sich, wie viele Tage A voraus gewesen sey?

$$xa + ac = bc$$
$$x = \frac{bc - ac}{a} = 6 \text{ Tage.}$$

x = Tage
a = 6
b = $7\frac{1}{2}$
c = 24

*) Ein Bote A geht täglich $5\frac{3}{4}$ Meilen, und ist $4\frac{1}{2}$ Tage voraus; dem schickt man einen andern Boten B nach, der ihn in 12 Tagen einhohlen solle, wie viele Meilen muß B täglich gehen?

$$ab + ac = xc$$
$$\frac{ab + ac}{c} = x = 7\tfrac{29}{32} \text{ Meilen.}$$

x = Meilen.
a = $5\frac{3}{4}$
b = $4\frac{1}{2}$
c = 12.

*) Zwey Boten gehen einander nach. A ist 5 Tage voraus, und geht täglich 6 Meilen; es fragt sich, in wie viel Tagen ihn B einhohlen werde, der täglich $7\frac{1}{2}$ Meilen gehet?

1 T. — c — x = cx, für B, wenn er A einhohlt.

1 T. — b — x = bx, Tage, die A bis zur Einhohlung gegangen.

ab = Tage, die A voraus war.

x = Tage des B.

$xc = xb + ab$ | $a = 5$

$xc - xb = ab$ | $b = 6$

$x = \frac{ab}{c-b} = 20$ Tage. | $c = 7\frac{1}{2}$

*) Zwey Boten gehen von 2 Städten zu gleicher Zeit gegen einander aus; und da sie in 8 Tagen zusammen kommen, so findet A, daß er $\frac{1}{3}$ des Wegs und 12 Meilen, B aber $\frac{1}{4}$ des Wegs und 24 Meilen gemacht habe. Wie weit sind beyde Städte von einander entlegen?

x = Meilen.

a = 8

(12)

b = 12

$\frac{1}{3}x + b + \frac{1}{4}x + c = x$ | $c = 24$

$4x + 12b + 3x + 12c = 12x$

$12x = 3x + 4x + 12b + 12c$

$12x - 7x = 12b + 12c$

$x = \frac{12b + 12c}{5} = \frac{432}{5} = 86\frac{2}{5}$ Meilen.

Probe:

— M. | $\frac{1}{3}$ aus | 86$\frac{2}{5}$ — M. | $\frac{1}{4}$ | 86$\frac{2}{5}$

$28\frac{4}{5} + 12 = 40\frac{4}{5}$ $21\frac{3}{5} + 24 = 45\frac{3}{5}$

$40\frac{4}{5} + 45\frac{3}{5} = 86\frac{2}{5}$

*) Es

*) Es liegen 2 Städte 100 Meilen weit von einander entfernt, und aus denselben werden zu gleicher Zeit 2 Couriers gegen einander ausgeschickt. A würde den ganzen Weg in 12 Tagen zurücklegen, B in 13 Tagen. Es fragt sich, in wie viel Tagen beyde Couriere zusammen kommen, und wie viele Meilen jeder zurückgelegt habe?

$$b \text{ Tag} - a \text{ Meilen} - x \text{ Tag} = \frac{ax}{b} \qquad x = \text{Tage.}$$

$$a = 100$$

$$b = 12$$

$$c \text{ Tag} - a \text{ Meilen} - x \text{ Tag} = \frac{ax}{c} \qquad c = 13$$

$$\frac{ax}{b} + \frac{ax}{c} = a$$

$$xca + xba = abc$$

$$xc + xb = bc$$

$$x(c + b) = bc$$

$$x = \frac{bc}{c+b} = \frac{156}{25} = 6\tfrac{6}{25}$$

Die Meilen selbst werden also berechnet:

— M.	$6\frac{6}{25}$ T.	— M.	$6\frac{6}{25}$ T.
13 T.	100 M.	12 T.	100 M.

48 = Meilen des B. 52 = Meilen des A.

Probe: 48 + 52 = 100.

*) An einem Baum, der 30 Ellen hoch ist, kriechet ein Wurm täglich 3 Ellen hinauf; bey Nacht fällt er wieder 1 Elle zurück. Zu gleicher Zeit ist oben am Gipfel ein Schneck, welcher bey Tage 4 Ellen herab, und bey Nacht wieder 1 Elle hinauf kriecht. Es fragt sich, in wie viel Tagen beyde einander begegnen, wenn man den Tag zu 24 Stunden rechnet.

1 T.

Zahl der Tage = x des Wurms und Schneckens Ellen = 30.

$$1\ \text{T.} — 2\ \text{Ellen} — x = 2x$$
$$1\ \text{T.} — 3\ \text{E.} — x = 3x$$
$$2x + 3x = 30$$
$$5x = 30$$
$$x = 6\ \text{Tage.}$$

*) Es liegen 2 Städte 100 Meilen weit von einander: davon gehen 2 Boten A und B zu gleicher Zeit gegen einander aus, und kommen in 8 Tagen zusammen. Wenn nun B täglich $1\frac{1}{2}$ Meile weiter gegangen als A, so fragt sich, wie viele Meilen jeder täglich zurückgelegt habe?

x = Weg des A. y = Weg des B. a = 100 b = 8 c = $1\frac{1}{2}$

$$x + c = y \qquad xb + yb = a$$
$$x = y - c \qquad xb = a - yb$$
$$x = \frac{a - yb}{b}$$
$$y - c = \frac{a - yb}{b}$$
$$yb - cb = a - yb$$
$$2yb - cb = a$$
$$2yb = a + cb$$
$$y = \frac{a + cb}{2b} = \frac{100 + 8\frac{1}{2}}{16} = 7\ \text{Meilen.}$$
$$x = y - c = 5\frac{1}{2}\ \text{Meilen.}$$

*) Zwey Boten gehen von 2 Städten, welche 100 Meilen von einander liegen, zu gleicher Zeit gegen einander aus; und da sie zusammen kommen, so findet A, daß er des B Weg in $4\frac{1}{2}$ Tag, B aber findet, daß er des A Weg in $14\frac{2}{9}$ Tag hätte zurücklegen können. Es fragt

fragt sich, in wie viel Tagen sie zusammen gekommen, und wie viele Meilen täglich jeder gegangen sey?

$$x = \text{Tage.} \quad y = \text{A Meil.} \quad z = \text{B Meil.} \quad a = 100 \quad b = 4\tfrac{1}{2} \quad c = 14\tfrac{2}{9}$$

$$xy + xz = a \qquad \frac{xz}{y} = b \qquad \frac{xy}{z} = c$$

$$xz = a - xy \qquad z = \frac{yb}{x} \qquad xy = cz$$

$$z = \frac{a - xy}{x} \qquad \frac{xy}{c} = z$$

$$\frac{yb}{x} = \frac{xy}{c} \qquad \frac{a - xy}{x} = \frac{yb}{x}$$

$$\frac{b}{x} = \frac{x}{c} \qquad a - xy = yb$$

$$a = xy + yb$$

$$bc = x^2 \qquad \frac{a}{x+b} = y = 8 \qquad z = \frac{yb}{x} = 4\tfrac{1}{2}.$$

$$\sqrt{bc} = x = 8$$

*) Es findet sich, daß jedesmal um 12 Uhr der Stunden- und Minutenzeiger an einer Uhr gerade über einander stehen; Es fragt sich, um welche Zeit selbige nachdem zum 1sten, 2ten, 3ten 2c. mal wieder gerade über einander zu stehen kommen?

Aufl. Wenn der Stundenzeiger n Minuten gegangen ist, so ist der Minutenzeiger 60 + n Minuten gegangen; und weil dieser 12 Minuten gehet, wenn der andere 1 Minute gehet, so ist

$$12n = 60 + n$$

$$12n - n = 60$$

$$11n = 60$$

$$n = \frac{60}{11} = 5\tfrac{5}{11} \text{ Minuten.}$$

Also

Also ist der Stundenzeiger $5\frac{5}{11}$ Minuten gegangen, da sie zum erstenmal über einander zu stehen gekommen; über $10\frac{10}{11}$ das 2te, über $16\frac{4}{11}$ das 3te, über $21\frac{9}{11}$ das 4te, über $27\frac{3}{11}$ das 5te, über $32\frac{8}{11}$ das 6te, über $38\frac{2}{11}$ das 7te, über $43\frac{7}{11}$ das 8te, über $49\frac{1}{11}$ das 9te, über $54\frac{6}{11}$ das 10te, und endlich über 60 Minuten das 11te mal.

Vermischte Aufgaben.

§. 29.

*) Wenn eine Gesellschaft doppelt so stark wäre, und noch ein halbmal so stark, so wären es 30 Personen.

(12)

$$2x + \tfrac{1}{2}x = 30$$
$$24x + 6x = 360$$
$$x = \frac{360}{30} = 12$$

*) Eine Zahl zu finden, wenn man sie 3, 4, 5 und 6fach nimmt, solle eben soviel über 436 kommen, als die Zahl selbst darunter ist.

$$3x + 4x + 5x + 6x - 436 = 436 - x$$
$$18x + x = 436 + 436$$
$$19x = 872$$
$$x = \frac{872}{19} = 45\tfrac{17}{19}.$$

*) Cajus hat eine Summe Geld; legt solche an einen Weinhandel, und verliert davon die

Hälfte und noch 60 fl. Den Rest legt er an einen Handel, und gewinnt damit $\frac{1}{3}$ desselben, und findet auch, daß er $\frac{3}{8}$ seines Gelds wieder hat. Wie viel hatte er anfangs?

x = Anfängl. Geld.
a = 60

$$x - \tfrac{1}{2}x - a \qquad (\tfrac{1}{2}x - a)\tfrac{1}{3}$$
$$\tfrac{1}{2}x - a \qquad \tfrac{1}{6}x - \tfrac{1}{3}a$$
$$\tfrac{1}{2}x - a$$
$$\tfrac{1}{6}x - \tfrac{1}{3}a$$

(24) $\frac{2}{3}x - 1\frac{1}{3}a = \frac{3}{8}x$
$$16x - 32a = 9x$$
$$7x = 32a$$
$$x = \frac{32a}{7} = 274\tfrac{2}{7}\text{ fl.}$$

*) Es sey die Summe zweyer Zahlen = 8, und die Differenz ihrer Quadrate = 16. Was sind es für Zahlen?

Erste Zahl = x. Andere = 8 — x.
Quadrat der ersten = x^2, der anderen =
$64 - 16x + x^2$
also die Differ. der Quadr. =
$64 - 16x + x^2 - x^2 = 64 - 16x$
$64 - 16x = 16$
$64 = 16 + 16x$ mit 4 divid.
$16 - 4 = 4x$
$x = \frac{16 - 4}{4} = \frac{12}{4} = 3.$ Also die andere Zahl = 5
dann $3 + 5 = 8.$
und $25 - 9 = 16.$

*) Zwey Zahlen zu finden, daß wenn man zum dritten Theil der grösseren die Hälfte der klei-

kleineren addiret, 8 kommen; und wenn man vom 5ten Theil der grossen den 3ten Theil der kleineren subtrahirt, 1 komme.

Grosse Zahl $= x$. Kleine $= y$.

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 8 \qquad \frac{x}{5} - \frac{y}{3} = 1$$

$$2x + 3y = 48 \qquad 3x - 5y = 15$$

$$2x = 48 - 3y \qquad 3x = 15 + 5y$$

$$x = \frac{48 - 3y}{2} \qquad x = \frac{15 + 5y}{3}$$

$$\frac{48 - 3y}{2} = \frac{15 + 5y}{3}$$

$$48 - 3y = \frac{30 + 10y}{3}$$

$$144 - 9y = 30 + 10y$$

$$144 = 30 + 10y + 9y$$

$$19y = 144 - 30$$

$$19y = 114$$

$$y = \frac{114}{19} = 6$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 8$$

$$\frac{x}{3} + \frac{6}{2} = 8$$

$$\frac{x}{3} + 3 = 8$$

$$x + 9 = 24$$

$$x = 24 - 9 = 15.$$

*) Cajus sagt: Meine Mutter hat mir und meinen 4 Geschwistrigen zu dem, was wir von unserem Vater empfangen haben, 3 fl. gegeben; die Hälfte meines Gelds gab ich den Armen, und 1 fl. verlohr ich, sodann hatte ich nichts mehr. Wie viel hat nun Caji Vater ihm und seinen 4 Geschwistrigen gegeben?

$$\frac{x+3}{5} - \frac{x-3}{10} - 1 = 0$$
$$10x + 30 - 5x - 15 - 50 = 0$$
$$10x + 30 - 5x - 15 = 50$$
$$5x = 50 + 15 - 30$$
$$x = \frac{65 - 30}{5} = \frac{35}{5} = 7.$$

Cajus bekam von seinem Vater	—	$1\frac{2}{5}$ fl.
von seiner Mutter	—	$\frac{3}{5}$ fl.
hatte also zusammen	—	2 fl.
davon gab er den Armen	—	1 fl.
		1 fl.
verlohr	—	1 fl.
hatte also	—	0.

*) Cajus ist 37 Jahre alt, und Titius ist 13 Jahre alt; in wie viel Jahren wird Cajus noch einmal so alt als Titius?

Zahl der Jahre = x

Weil nun beyde gleich viel an Jahren zunehmen, so ist Cajus Alter 37 + x
Titius Alter 13 + x

Da nun Cajus noch einmal so alt seyn solle als Titius;

so

so ist $\frac{37+x}{2} = 13 + x$

$37 + x = 26 + 2x$

$37 - 26 = 2x - x$

$11 = x$

Cajus wird neml. in 11 Jahren = 48
und Titius wird in 11 Jahren = 24 Jahre alt.

*) Cajus ist 54 Jahre alt, und Titius 43. Vor wie viel Jahren war Cajus noch einmal so alt als Titius?

Jahre = x

Caji Alter = 54 − x

Titii = 43 − x

$\frac{54-x}{2} = 43 - x$

$54 - x = 86 - 2x$

$2x - x = 86 - 54$

$x = 32$

denn vor 32 Jahren war Cajus 22 Jahre
und Titius 11 Jahre alt.

*) Ein Wasserkasten hat 2 Teichel, wodurch man das Wasser ablassen kann. Wenn der grössere Teichel geöffnet wird, so lauft der Wasserkasten in 6 Stunden aus; wird aber der kleinere geöffnet, so lauft er in 18 Stunden aus: wenn nun beyde Teichel zugleich geöffnet werden, in wie vielen Stunden lauft der Wasserkasten aus?

Stunden = x. Wasser im Kasten = 1.

Weil das Wasser, so aus dem grossen und kleinen Teichel auslauft, das ganze Wasser

ausmacht, so ist das Wasser vom grossen und das Wasser vom kleinen Teichel = 1

$$6\text{Stunden} \ldots\ldots 1 \ldots\ldots x\text{St.} = \frac{x}{6}$$

$$18 \text{ St.} \ldots\ldots 1 \ldots\ldots x = \frac{x}{18}$$

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{18} = 1 = 18x + 6x = 6.18$$

$$3x + x = 18$$

$$4x = 18$$

$$x = \frac{18}{4} = 4\tfrac{1}{2} \text{ Stunden.}$$

*) Ein Wasserkasten wird durch einen Teichel in 12 Stunden gefüllt; dagegen kann er durch einen anderen Teichel in 18 Stunden ablauffen. Wenn nun der Kasten leer ist, und beyde Teichel offen bleiben, in wie vielen Stunden wird er voll?

Stunden = x Wasser = 1

$$12 \text{ St.} \ldots\ldots 1 \ldots\ldots x\text{St.} = \frac{x}{12}$$

$$18 \text{ St.} \ldots\ldots 1 \ldots\ldots x \text{ St.} = \frac{x}{18}$$

Wenn man nun vom zufliessenden Wasser das abfliessende abzieht, so bleibt das Wasser im Kasten übrig.

$$\frac{x}{12} - \frac{x}{18} = 1$$

$$18x - 12x = 12.18 \text{ mit 6 divid.}$$

$$3x - 2x = 36$$

$$x = 36$$

Denn

Denn in 36 Stunden lauft der Wasserkasten 3mal voll, und ist in 36 Stunden 2mal leer. Mithin ist er in 36 Stunden 1mal voll.

*) Es kauft jemand 16 Aepfel und 20 Birnen um 4 kr. und wiederum kauft er in selbigem Preis 12 Aepfel und 60 Birnen um 6 kr. Wie viel Aepfel und wie viel Birnen gehen auf 1 kr.

Ein Apfel $= x$

16 Aepfel $= 16x$

20 Birnen $= 4 - 16x$

1 Birne $= \frac{4 - 16x}{20}$

12 Aepfel $= 12x$

60 Birnen $= 6 - 12x$

1 Birne $= \frac{6 - 12x}{60}$

$$\frac{6 - 12x}{60} = \frac{4 - 16x}{20}$$

$$6 - 12x = \frac{240 - 960x}{20}$$

$$120 - 240x = 240 - 960x$$

$$960x - 240x = 240 - 120$$

$$720x = 120$$

$x = \frac{120}{720} = \frac{1}{6}$ Kreuzer.

Also 6 Aepfel für 1 kr.

1 Birne $= \frac{6 - 12x}{60} =$ 15 Birnen für 1 kr.

 *) Drey

*) Drey Personen kauffen ein Stück Fleisch; der erste nimmt davon $\frac{1}{4}$, von dem was übrig bleibt, nimmt der zweyte $\frac{1}{6}$, und sodann bleibt dem dritten noch 15 ℔; wie viel hat das ganze Stück gewogen?

Gewicht $= x$

$$\frac{4x}{4} - \frac{1x}{4} = \frac{3x}{4}$$

$$\frac{3x}{4} : 6 = \frac{3x}{24}$$

$$\frac{3x}{4} - \frac{3x}{24} = \frac{5x}{8}$$

folgl. $$\frac{3x}{4} + \frac{5x}{8} + 15 = x$$

$$\frac{11x}{8} + 15 = x$$

$$11x + 120 = 8x$$

$$11x - 8x = 120$$

$$3x = 120$$

$$x = \frac{120}{3} = 40$$

*) Zwey Weiber haben Eier; die eine sagt: gibst du mir eines von deinen Eiern, so habe ich so viel als du. Nein, sagt die andere, sondern gib du mir eines von den deinigen, so hab ich noch einmal so viel als du. Wie viel hat jede gehabt?

Eier der ersten $= x$

der anderen $= y$

Im

Im ersten Fall hat die erste $x+1$
die andere $y-1$
folgl. $x+1=y-1$
Im anderen Fall die erste $x-1$
die andere $y+1$

folglich, weil die andere noch so viel hat, und folglich also ihre Eier mit 2 dividirt werden müssen, wenn beyde gleichviel haben sollen, so ist

$$\frac{y+1}{2}=x-1 \qquad x+1=y-1$$
$$x+1+1=y$$
$$\frac{y+1}{2}+1=x \qquad x+2=y$$
$$x=y-2$$

$$y-2=\frac{y+1}{2}+1$$
$$y-3=\frac{y+1}{2}$$
$$2y-6=y+1$$
$$2y-y=1+6$$
$$y=7. \text{ folgl. } x=5.$$

*) Ein Knab will Aepfel und Birnen kauffen; es kosten aber 10 Aepfel 2 kr. und 25 Birnen 4 kr. Wie viel muß er von jeder Gattung nehmen, daß es für 100 Stücke gerade 19 kr. ausmacht?

$x=$ Aepfel. $y=$ Birnen.

$$b \ldots a \ldots x=\frac{ax}{b} \qquad a=2$$
$$b=10$$
$$c=4$$
$$d \ldots c \ldots y=\frac{cy}{d} \qquad d=25$$
$$f=100$$
$$g=19$$

$$\frac{xa}{b} + \frac{yc}{d} = g \qquad x + y = f$$
$$x = f - y$$
$$xad + ycb = bdg$$
$$x = \frac{bdg - ycb}{ad}$$
$$\frac{bdg - ycb}{ad} = f - y$$
$$bdg - ycb = adf - ady$$
$$ady - ycb = adf - bdg$$
$$y = \frac{adf - bdg}{ad - cb} = 25.$$
$$x = 100 - 25 = 75.$$

*) Man dinget einen Arbeiter auf 30 Tage. Wenn er arbeitet, bekommt er 7 Groschen Lohn; wenn er aber feyret, so werden ihm zur Strafe 5 Groschen abgezogen. Da nun die 30 Tage verflossen waren, so fand sichs, daß er nichts zu fordern gehabt habe; wie oft hat er gefeyret, und wie oft gearbeitet?

y = Feyertage. x = Arbeitstage.

$$x + y = c \qquad xa = yb \qquad a = 7$$
$$x = c - y \qquad x = \frac{yb}{a} \qquad b = 5$$
$$c = 30$$
$$\frac{yb}{a} = c - y$$
$$yb = ac - ay$$
$$yb + ay = ac$$
$$y = \frac{ac}{a + b} = 17\tfrac{1}{2}.$$
$$x = c - y = 12\tfrac{1}{2}.$$

*) Titius

*) Titius hinterläßt 84000 fl. und verordnet, daß wenn seine schwangere Frau einen Sohn gebähre, so solle dieser $\frac{2}{3}$ und seine Frau $\frac{1}{3}$ haben; wenn sie aber eine Tochter gebähre, so soll diese $\frac{1}{3}$ und sie, die Frau, $\frac{2}{3}$ bekommen. Nun aber gebieret die Frau einen Sohn und eine Tochter; wie ist die Verlassenschaft zu theilen?

Der Sinn des Titius war, daß der Sohn 2mal so viel als die Mutter, und die Mutter 2mal so viel als die Tochter haben soll;

wenn also die Tochter erhält $= x$
so hat die Mutter $= 2x$
und der Sohn $= 4x$

demnach ist

$$x + 2x + 4x = 84000$$
$$7x = 84000$$
$$x = \frac{84000}{7} = 12000.$$

also Tochter $= 12000.$
Mutter $= 24000.$
Sohn $= 48000.$
Summe $= 84000.$

*) Ein Spieler verspielt die Hälfte und $\frac{3}{8}$ seines Gelds, und findet noch 15 fl. übrig: es fragt sich, wie viel er zuerst gehabt?

Er hat gehabt $= x$

Er hat verspielt

$$\frac{x}{2} + \frac{3x}{8}$$
$$\frac{8x + 6x}{16} = \frac{14x}{16} = \frac{7x}{8}$$

Nun

Nun ist $x - \frac{7x}{8} = 15$

$$8x - 7x = 120$$
$$x = 120.$$

*) Drey spielen mit einander: im ersten Spiel verliert der erste an jeden der beyden anderen so viel, als ein jeder der beyden anderen an Geld bey sich hatte. Im anderen Spiel verliert der 2te an den ersten und dritten so viel als ein jeder hat. Im dritten Spiel verliert der dritte an den ersten und 2ten so viel ein jeder hatte. Und da findet sich, daß alle nach geendigtem Spiel gleichviel haben, nemlich jeder 24 fl. Wie viel hatte anfänglich ein jeder?

Man seze, der erste habe gehabt x
der 2te y
der 3te z

so ist $x + y + z = S$.

Da nun im ersten Spiel der erste so viel verliert, als die beyden anderen haben, und der erste x hat, so haben beyde andere $S - x$ und so viel verliert der erste, also bleibt ihm noch $2x - S$ (denn $x - (S - x) = 2x - S$)
der 2te hat $2y$
der 3te hat $2z$

Im 2ten Spiel verliert der andere, der nun $2y$ hat, an die beyden andere so viel, als sie haben, oder $S - 2y$, daher behält der 2te noch $4y - S$; die beyden anderen aber werden noch 2mal so viel haben, als vorhin. Also nach dem 2ten Spiel hat

der

der erste $= 4x - 2S$
der 2te $= 4y - S$
der 3te $= 4z$.

Im 3ten Spiel verliert der 3te, der jezt $4z$ hat, an die andere beyde, so viel sie haben; sie haben aber $S - 4z$. Also behält der 3te noch $8z - S$, und die übrige beyde bekommen doppelt so viel als sie hatten. Also hat nach dem 3ten Spiel

der erste $= 8x - 4S$
der 2te $= 8y - 2S$
der 3te $= 8z - S$.

Da nun jeder 24 fl. hat, so geben sich 3 Gleichungen, aus deren jeder sich das Unbekannte unmittelbar finden läßt; Denn S ist bekannt $= 3 . 24 = 72$ fl.

Also hat gehabt $A = 39$
$B = 21$
$C = 12$

Andere Auflösung: blos durch die gemeine Arithmetik.

Man darf nur rückwärts gehen; da die 3 Personen nach dem 3ten Spiel jeder 24 fl. hatten; im 3ten Spiel aber der erste und 2te ihr Geld verdoppelt haben, so müssen sie vor dem 3ten Spiel gehabt haben:

$A = 12$ $B = 12$ $C = 48$

Im 2ten Spiel hat der erste und 2te sein Spiel verdoppelt, also müssen sie vor dem 2ten Spiel gehabt haben:

$A = 6$ $B = 42$ $C = 24$

Im

Im ersten Spiel hat der 2te und 3te sein Geld verdoppelt; also vor dem ersten Spiel haben sie gehabt:

$$A = 39 \qquad B = 21 \qquad C = 12$$

Und so viel hatten sie anfangs.

Eulers Algebra. 2. Th. S. 47 f.

*) Ein Vater hinterläßt 4 Söhne, welche die Erbschaft also unter sich theilen: der erste nimmt 3000 Rthlr. weniger, als die Hälfte der Erbschaft. Der 2te nimmt 1000 Rthlr. weniger, als $\frac{1}{3}$ der Erbschaft. Der 3te nimmt gerade $\frac{1}{4}$ der Erbschaft. Der 4te nimmt 600 Rthlr. und $\frac{1}{5}$ der Erbschaft. Wie groß war die Erbschaft, und wie viel hat ein jeder Sohn bekommen?

Ganze Erbschaft = x.

Der erste bekommt $= \frac{1}{2}x - 3000$

2te $= \frac{1}{3}x - 1000$

3te $= \frac{1}{4}x$

4te $= \frac{1}{5}x + 600$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x - 3400 = x$$

$$\frac{77}{60}x - 3400 = x$$

$$\frac{77}{60}x - x = 3400$$

$$\frac{17}{60}x = 3400 \text{ durch 17 dividirt}$$

$$\frac{1}{60}x = 200$$

$x = 200 \cdot 60 = 12000$ Rthlr, ganze Verlassenschaft.

Also

Also hat $A = 3000$
$B = 3000$
$C = 3000$
$D = 3000$

12000 Rthlr.

Eulers Algebra. 2 Th. S. 23.

*) Etliche Kaufleute bestellen zu Treibung eines Handels einen Faktor. Sie legen ein, jeder 10mal so viel als Personen sind; der Faktor gewinnt je mit 100 Rthlr. so viel, als der Personen sind. Wenn man nun $\frac{1}{100}$ des ganzen Gewinnsts mit $2\frac{2}{9}$ multiplicirt, so kommt die Zahl der Kaufleute; welche demnach gefunden werden solle.

Zahl der Kaufleute $= x$; so ist
die Einlage eines jeden $= 10x$,
und die ganze Einlage $= (10x)x = 10x^2$
nun inferirt man: an 100 Rthlr. gewinnt der Faktor $2x$ Rthlr, was gewinnt er mit dem ganzen Kapital von $10x^2$; so kommt

$$\frac{2x.\,10x^2}{100} = \frac{20x^3}{100} = \tfrac{1}{5}x^3$$

der $\frac{1}{100}$ Theil dieses Gewinnsts ist demnach $= \frac{1}{500}x^3$

dieses mit $2\frac{2}{9}$ oder $\frac{20}{9}$ multiplicirt, gibt $\frac{20}{4500}x^3 = \frac{1}{225}x^3$ welches der Zahl der Kaufleute gleich seyn muß.

$$\tfrac{1}{225}x^3 = x$$
$$x^3 = 225x$$
$$x^2 = 225$$
$$x = \sqrt{225} = 15.$$

Eulers Algebra. 2 Th. S. 68.

*) Ti:

*) Titius gibt einem Armen, der ihm zuerst begegnet, $\frac{1}{6}$ von seinen bey sich gehabten Kreuzern, und noch 4; dem anderen, der ihm begegnet, wieder $\frac{1}{6}$ und 8 kr. dem dritten wieder $\frac{1}{6}$ und 12 kr. und so gibt er jedem, der ihm begegnet, $\frac{1}{6}$, und steigt bey dem dazugegebenen allemal um 4 kr. auf. Am Ende aber haben alle Arme gleichviel erhalten. Wie viel waren es Arme? und wie viel hatte er zuerst Kreuzer?

x = Zahl der Kreuzer.

der erste bekam $\frac{x}{6} + 4$

nachher blieb also übrig

$$\frac{5x}{6} - 4 \text{ oder } \frac{5x - 24}{6}$$

davon ist der 6te Theil

$$= \frac{5x - 24}{6.6} = \frac{5x - 24}{36}$$

$\frac{5x - 24}{36} + 8$ bekam also der zweyte.

Da nun die Armen gleichviel bekamen, so ist

$$\frac{x}{6} + 4 \text{ oder } \frac{x + 24}{6} = \frac{5x - 24}{36} + 8$$

$$\frac{6x + 144}{36} = \frac{5x - 24}{36} \frac{+ 288}{}$$

$$6x + 144 = 5x - 24 + 288$$

$$x + 144 = 264$$

$x = 264 - 144 = 120$. so viel hatte er anfangs.

Von diesen 120 kr. bekam nun $A = \frac{1}{6} = 20 + 4 = 24$. und so alle übrige;

folgl. $\frac{120}{24} = 5$ = Zahl der Armen.

*) Es

*) Es werden 130 Ochsen in 4 Ställe getrieben: so oft in den ersten 2 kommen, so oft kommen in den zweyten 3, und sofort nach dieser Verhältniß in den folgenden Stall mehrere. Wie viele kamen in jeden Stall?

$x =$ erster Stall.

$A = x$

um B zu finden, muß man schliessen:

$$2 \ldots 3 \ldots x = \frac{3x}{2} = 1\tfrac{1}{2}x = B.$$

um C zu finden:

$$2 \ldots 3 \ldots \frac{3x}{2} = \frac{9x}{4} = 2\tfrac{1}{4}x = C.$$

um D zu finden:

$$2 \ldots 3 \ldots \frac{9x}{4} = \frac{27x}{8} = 3\tfrac{3}{8}x = D.$$

Also $A = x$
$B = 1\tfrac{1}{2}x$
$C = 2\tfrac{1}{4}x$
$D = 3\tfrac{3}{8}x$

$$8\tfrac{1}{8}x = a = 130$$
$$65x = 8a$$
$$x = \frac{8a}{65} = 16 = \text{erster Stall.}$$

24 = zweyter.
36 = dritter.
54 = vierter.

Summe = 130.

*) Ein Kaufmann vermehrt sein Geld jährlich um $\frac{1}{3}$, ausgenommen 200 Thaler, welche er dem Hausbrauch bestimmt. Nach 3 Jahren ist er 2mal reicher als anfänglich; wie viel hatte er beym Anfang?

Sein Geld beym Anfang $= x$
er gibt im ersten Jahre aus 200
hat also sodann noch $x - 200$
dieses vermehrt er um $\frac{1}{3}$

$$x - 200 + \frac{x - 200}{3} = \frac{4x - 800}{3}$$

Im anderen Jahr gibt er abermal aus 200,
hat sodann noch

$$\frac{4x - 800}{3} - 200 = \frac{4x - 1400}{3}$$

dieses vermehrt er um $\frac{1}{3}$

$$\frac{4x - 1400}{3} + \frac{4x - 1400}{9} = \frac{16x - 5600}{9}$$

Im dritten Jahr gibt er abermal aus 200.
hat also noch

$$\frac{16x - 5600}{9} - 200 = \frac{16x - 7400}{9}$$

diese vermehrt er um $\frac{1}{3}$

$$\frac{16x - 7400}{9} + \frac{16x - 7400}{27} = \frac{64x - 29600}{27}$$

Es ist aber nach der Voraussetzung

$$\frac{64x - 29600}{27} = 2x$$

$$64x - 29600 = 54x$$

$$64x - 54x = 29600$$

$$10x = 29600$$

$x = 2960.$ Thaler hatte er beym Anfang.

Zweyten Kapitels

Zweyte Abtheilung.

Unbestimmte arithmetische Aufgaben.

§. 30.

Eine bestimmte Aufgabe wird genennet, welche nach den in derselben enthaltenen Bedingungen nur eine einzige Antwort zuläßet.

Z. B. Man solle 6 in zwey gleiche Theile theilen. Hier sind nur die Zahlen 3 und 3, und also nur diese einzige Auflösung möglich.

Unbestimmt heißt eine Aufgabe, aus deren Bedingungen mehr als eine Antwort möglich ist.

Z. B. Man solle 6 in lauter gleiche ganze Zahlen theilen. Hier sind dreyerley Antworten möglich

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, und $2 + 2 + 2$ und $3 + 3$.

Oder, man solle 6 überhaupt in 2 Theile theilen, von ganzen Zahlen.

Hier sind schon mehrere Antworten möglich, denn es ist auch $6 = 3 + 3$, oder $2 + 4$, oder $1 + 5$ rc.

Oder man solle 6 überhaupt in 2 Theile theilen. Hier sind, wenn die Theile auch Brüche seyn darfen, unzähliche Antworten möglich.

*) Sonst pflegt man auch noch weiter zu unterscheiden:

Problema Indeterminatum, in quo quantitates incognitæ una plures sunt, quam Conditiones. *Problema Plusquam Indeterminatum*, si numerus quantitatum incognitarum numerum conditionum adhuc magis excedit. (*de la Caille.*)

Oft scheinet eine Aufgabe unbestimmt zu seyn, und sie ist wirklich bestimmt; und bestimmt zu seyn, und sie ist unbestimmt.

Gemeiniglich findet eine unbestimmte Aufgabe bey mehreren unbekannten Grössen statt, von denen man die eine nach Belieben annehmen kann, wodurch aber sodann die andere bestimmt wird, und durch den Calcul gesucht werden muß.

Man sagt auch, es entstehe eine unbestimmte Aufgabe, wenn man mehrere unbekannte Grössen finden soll, als Gleichungen gegeben werden.

§. 31.

Aufgabe.

Man solle 3 Zahlen, x, y, z finden, welche einerley Differenz unter sich haben, und zusammengenommen die Summe 105 ausmachen.

Die Bedingungen dieser Aufgabe lassen sich nur durch 2 Gleichungen ausdrücken:

$x + y + z = 105$ und

$x - y = y - z$

man versuche nun, ob etwas herauszubringen sey.

$x - y = y - z$

$x = 2y - z$

dieses

dieses in der Gleichung $x + y + z$ substituirt, gibt:

$$2y - z + y + z = 105$$
$$3y = 105$$
$$y = \frac{105}{3} = 35$$

folglich $x + 35 + z = 105$.

Hieraus aber ist weder x noch z herauszubringen. Man muß also den Werth der einen Unbekannten für bekannt annehmen; z. B. Es sey $x = 10$; so wird $z = 60$ und die Zahlen 10. 35. 60 werden die in der Aufgabe verlangte Eigenschaften haben.

Nimmt man $x = 12$ an, so wird $z = 58$ und die Zahlen 12. 35. 58 werden ebenfalls jene Bedingungen erfüllen.

Es erhellet sogar, weil $x + z = 70$, daß gegenwärtige Aufgabe 69 Auflösungen in ganzen und positiven Zahlen habe; indem man statt x alle Zahlen von 1 bis 69 nach und nach substituiren kann. Allein mehrere Fälle sind nicht möglich, in ganzen Zahlen; darf man aber Brüche nehmen, so sind der Auflösungen unzählige.

§. 32.

Eine weitere und ganz begreifliche Regel ist, daß man solche Zahlen annehme, welche nach den Bedingungen der Aufgabe angenommen werden darfen, und nicht vorher schon ausgeschlossen sind. Z. B. wenn solche Zahlen für Gegenstände zu suchen wären, welche keiner Zertheilung oder Brüche fähig sind.

Z. B. Man solle 153 in lauter ganzen Carolin zu 11 fl. und lauter ganzen Ducaten zu 5 fl. bezahlen; man will wissen, wie viele Stücke Carolin und Ducaten man zu nehmen habe?

Es seyen Carolin $= x$

Ducaten $= y$

1 Carol. .... 11 fl. .... $x = 11x$

1 Duc. .... 5 fl. .... $y = 5y$

$$11x + 5y = 153$$

$$5y = 153 - 11x$$

$$y = \frac{153 - 11x}{5}$$

Man siehet nun wohl, daß man für x eine solche Zahl wählen müsse, welche

1.) mit 11 multiplicirt sich noch von 153 abziehen lasse.

2.) Wo man nach ihrem Abzug noch mit 5 dividiren könne.

Man nehme $x = 8$

so ist $y = \frac{153 - 88}{5} = \frac{65}{5} = 13$ Ducaten.

oder man nehme $x = 13$

so ist $y = \frac{153 - 143}{5} = \frac{10}{5} = 2$ Ducaten.

*) Einen Bruch zu finden, der die Eigenschaft habe, daß wenn man ihn mit einer gegebenen Zahl multiplicirt, eine andere gegebene Zahl herauskomme.

Es sey die eine gegebene Zahl $= a$

die andere $= b$

der verlangte Bruch $= \frac{x}{y}$

$$\frac{x}{y} . a = b$$

$$\frac{ax}{y} = b$$

$$ax = by$$

$$x = \frac{by}{a} = b . \frac{y}{a}$$

Weil der Nenner des verlangten Bruchs nicht wieder ein Bruch seyn kann, so muß man statt y eine solche Zahl annehmen, die sich mit a dividiren lässet.

Z. B. Man soll einen Bruch finden, daß 3 herauskomme, wenn man ihn mit 2 multiplicirt.

so ist $x = 3 . \frac{y}{2}$

Es sey nun nach Belieben $y = 2$, so ist $x = 3$ mithin der verlangte Bruch $= \frac{3}{2}$. denn $\frac{3}{2} . 2 = \frac{6}{2} = 3$

oder man nenne $y = 8$, so ist

$3 . \frac{8}{2} = 3 . 4 = 12 = x$

also der Bruch $= \frac{12}{8}$ und $\frac{12}{8} . 2 = \frac{24}{8} = 3$.

*) Man soll 36 in eine arithmetische Progression mit lauter ganzen Zahlen verwandlen, in welcher die Differenz der Glieder = 2.

Es sey das erste Glied = x

Zahl der Glieder = y.

Nun hat man die bekannte Formul

$u = a + d(n - 1)$ oder hier

$u = x + 2(y - 1)$

$u = x + 2y - 2$

Wo u das lezte Glied, a das erste, d die Differenz, n die Zahl der Glieder, und 5 die Summe bedeutet.

ferner

$$s=(a+u)\frac{n}{2} \text{ oder hier}$$

$$36=(x+x+2y-2)\frac{y}{2}$$

$$36=(2x+2y-2)\frac{y}{2}$$

$$36=(x+y-1)y$$

$$36=xy+y^2-y$$

$$36-y^2+y=xy \text{ mit } y \text{ dividirt}$$

$$\frac{36}{y}-y+1=x.$$

Man muß also für y eine solche Zahl nehmen, daß man 36 damit dividiren kann, und daß man aus dem Quotienten + 1 sie wieder abziehen kann.

Z. B. Es sey $y=6$, so ist

$x=\frac{36}{6}+1-6=1.$ Dann

$1+3+5+7+9+11=36$

oder es sey $y=3$, so ist

$x=\frac{36}{3}+1-3=10.$ Dann

$10+12+14=36$

oder es sey $y=4$, so ist

$x=\frac{36}{4}+1-4=6.$ Dann

$6+8+10+12=36.$

oder man wollte setzen $y=9$, so ist

$x=\frac{36}{9}+1-9.$ Allein bey dieser Annahme kann man nun nicht subtrahiren.

*) Man

*) Man soll 1 in eine geometrische Progression verwandlen, die aus unendlich vielen abnehmenden Brüchen, deren Exponent 3 ist, bestehet.

Es sey der erste Bruch $= \frac{x}{y}$ und der lezte $= 0$.

Man hat die Formul bey der abnehmenden Geom. Progr.

Wo s die Summe, a das erste Glied, ω das lezte, q den Exponenten bedeutet. S. unten das 5te Kap.

$$s = \frac{\omega - a}{q - 1} + \omega \text{ oder hier}$$

$$s = \frac{0 + \frac{x}{y}}{3 - 1} + \frac{x}{y} = 1$$

$$\frac{x}{2y} + \frac{x}{y} = 1$$

$$x + 2x = 2y$$

$$3x = 2y$$

$$x = \frac{2y}{3} = \frac{2.y}{3}$$

Man muß also für y eine Zahl annehmen, die sich mit 3 dividiren lässet.

Z. B. Es sey $y = 3$, so ist $x = 2$.

Denn $\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81} \infty = 1$.

§. 33.

Weitere Aufgaben.

*) Es kauft jemand Hämmel und Schaafe. Um einen Hammel gibt er 3 fl. und um 1 Schaaf 2 fl. Wenn er nun für beyde Gattungen 18 fl. bezahlt; wie viel sind es Hämmel, und wie viel Schaafe?

Werth der Hämmel und Schaafe $= 18$
Hämmel $= x$ Schaafe $= y$
1 Ham̃. .... 3 fl. .... x Häm̃. $= 3x$
1 Sch. .... 2 .... y Sch. $= 2y$

$$3x + 2y = 18$$
$$3x = 18 - 2y$$
$$x = 6 - \frac{2y}{3} = 6 - 2 . \frac{y}{3}$$

Man muß also für y eine solche Zahl annehmen, die 1.) sich mit 3 dividiren läßt, daß kein Bruch komme. 2.) daß sich $\frac{2y}{3}$ von 6 subtrahiren lasse.

Man nehme also $y = 3$
so ist $x = 6 - 2 . 1 = 4$
oder $y = 6$, so ist $x = 6 - 2 . 2 = 2$

folglich sind es entweder 4 Hämmel und 3 Schaafe, oder 2 Hämmel und 6 Schaafe. Denn im ersten Falle ist $12 + 6 = 18$, und im 2ten $6 + 12 = 18$.

Man kann aber durch Substitution finden, wie man schicklich benennen solle.

Z. B.

Z. B. Man hatte $x = 6 - \frac{2y}{3}$

Nun setze man $\frac{2y}{3} = v$

$$2y = 3v$$

$$y = \frac{3v}{2} = v + \frac{v}{2}$$

ferner setze man $\frac{v}{2} = z$

$$v = 2z$$

folgl. ist $y = 2z + z = 3z$

Man muß demnach die Zahl der Schaafe mit $3z$ oder welches einerley ist, mit $3y$ benennen.

1 H. .... 3 fl. .... $x = 3x$
1 Sch. .... 2 fl. .... $3y = 6y$

$$3x + 6y = 18$$
$$3x = 18 - 6y$$
$$x = 6 - 2y$$

Mithin muß man für y entweder 1 oder 2 annehmen; alsdann ist im ersten Fall $x = 4$, im zweyten $= 2$ und die Zahl der Schaafe, $3y$ ist entweder 3 oder 6.

*) Es kauft jemand Hämmel und Schaafe. Ein Hammel gilt 5 fl. und ein Schaaf 4 fl. Wenn er nun für beyde Gattungen 48 fl. bezahlt, wie viel sind es Hämmel, und wie viel Schaafe?

1 H. .... 5 fl. .... x H. $= 5x$
1 Sch. .... 4 fl. .... y Sch. $= 4y$

$$5x + 4y = 48$$
$$5x = 48 - 4y$$
$$x = \frac{48 - 4y}{5}$$

Weil aber hier zwey Brüche vorkommen, und man diese gerne vermeidet, so suche man y

$$5x + 4y = 48$$
$$4y = 48 - 5x$$
$$y = 12 - \frac{5x}{4}$$

Man muß also statt x entweder 40 oder 8 annehmen.

Im ersten Fall wird $y = 7$,
im andern $y = 2$.

Will man aber die bequemste Benennung finden, so substituire man:

$$y = 12 - \frac{5x}{4}$$
$$y = 12 - x - \frac{x}{4}$$

Man setze $\frac{x}{4} = v$
$$x = 4v$$
folgl. $y = 12 - 4v - v$
$$y = 12 - 5v.$$

Man muß also für v entweder 1 oder 2 annehmen. Alsdann ist $x = 4v$ entweder 40 oder 8, und y im ersten Fall $= 12 - 5.1 = 7$. im 2ten $12 - 5.2 = 2$. Denn 4 Hämmel und 7 Schaafe kosten 48 fl. und 8 Hämmel und 2 Schaafe kosten auch 48 fl.

*) Es

*) Es sollen zwey Zahlen von der Beschaffenheit gefunden werden, daß die eine zum Quadrat der anderen addirt eine Quadratzahl gebe, deren Wurzel der Summe der Zahlen gleich ist.

$$x^2 + y = x^2 + 2xy + y^2$$
$$y = 2xy + y^2$$
$$1 = 2x + y$$
$$\frac{1 - y}{2} = x$$

Die verlangte Zahlen sind also kleiner als eine Einheit, und demnach Brüche.

§. 34.

Oefters scheinet eine Aufgabe unbestimmt zu seyn, und sie ist bestimmt.

Z. B. Eine gewisse Anzahl Manns- und Weibspersonen verzehren mit einander 56 kr. Daran muß ein Mann 7 kr. und eine Weibsperson 5 kr. bezahlen: wie viel waren es von jedem Geschlecht?

1 M. .... 7 kr. .... $x = 7x$
1 W. .... 5 kr. .... $y = 5y$

$$7x + 5y = 56$$
$$7x = 56 - 5y$$
$$x = \frac{56 - 5y}{7} = 8 - \frac{5y}{7}$$

Mithin kann y keine andere Zahl als $= 7$ und $x = 3$ seyn;

denn 3 Männer verzehren 21 kr.
und 7 Weibspersonen 35 kr.
zusammen: 56.

§. 35.

Es können auch manchmal Aufgaben einen unmöglichen Fall enthalten.

Z. B. Man solle 25 kr. mit lauter Groschen und 6 kr. Stücken bezahlen.

$$3x + 6y = 25$$
$$x + 2y = 8\tfrac{1}{3}.$$

Da nun weder x noch y ein Bruch ist, so ist die Auflösung dieser Aufgabe unmöglich, wie auch sogleich bey der ersten Ueberlegung erhellet.

Würde man aber statt 25 eine solche Zahl angenommen haben, welche sich mit 3 dividiren lässet, so wäre kein Bruch gekommen, und die Auflösung möglich gewesen.

§. 36.

Es können auch 3 unbekannte Grössen vorkommen: und man nimmt sodann eine davon als bekannt an.

Z. B. Es kauft jemand Schweine, Kälber und Schaafe; und zwar ein Schwein für 4 fl. ein Kalb für 3 fl. und ein Schaaf für 2 fl. Wenn er nun für alle Gattungen 16 fl. bezahlt, wie viel waren es von jeder Gattung?

Schweine = x. Kälber = y. Schaafe = z.

1 S. .... 4 fl. .... x = 4x
1 K. .... 3 fl. .... y = 3y
1 S. .... 2 fl. .... z = 2z

$$4x + 3y + 2z = 16$$
$$3y + 2z = 16 - 4x$$

Es

Es sey nun $x=1$ so ist

$$3y+2z=12$$

$$3y=12-2z$$

$$y=4-\frac{2z}{3}$$

Weil nun y nichts als 2 seyn kann, so ist $z=3$. Würde man $x=3$ setzen, so wäre es unmöglich, indem für die Kälber und Schaafe nur 4 fl. übrig bliebe, da doch 1 Kalb + 1 Schaaf = 5 fl. Mithin ist es entweder 1 Schwein 2 Kälber und 3 Schaafe, oder 2 Schweine 2 Kälber und 1 Schaaf.

Anmerk. Wenn in der Alligations-Regul 3 Sorten mit einander vermischt werden sollen, so gehört solches ebenfalls unter die unbestimmten Aufgaben: Weil aber hier Brüche stehen können, so ist die Auflösung leichter.

*) Man solle Englisch Zinn, das Pfund zu 32 kr. gemein Zinn zu 24 kr. und Bley zu 8 kr. also unter einander mischen, daß das vermischte Pfund 21 koste; wie viele Lothe hat man von jeder Sorte zu nehmen?

Loth Engl. Zinn $=x$.
Gemein Zinn $=y$.
Bley $=z$ oder $32-x-y$

32 L.

32 L. .... 32 kr. .... $x = x$.

32 L. .... 24 .... $y = \frac{24y}{32} = \frac{3y}{4}$

32 L. .... 8 .... $z = \frac{8z}{32}$ oder

$\frac{32}{4}$ L. .... $\frac{8}{4}$ .... $(32 - x - y)$

$$= \frac{32 - x - y}{4}$$

$$x + \frac{3y}{4} + \frac{32 - x - y}{4} = 21$$

$$4x + 3y + 32 - x - y = 84$$

$$3x + 2y = 52$$

$$2y = 52 - 3x$$

$$y = 26 - \frac{3x}{2}$$

Nun kann man x auf vielerley Art annehmen; sezt man z. B. $x = 4$, so ist $y = 20$, folgl. $z = 8$.

Zwey.

Des zweyten Kapitels

Dritte Abtheilung.

Von der Art und den Vortheilen einer geschickten Benennung oder Substitution, bey arithmetischen Aufgaben.

§. 37.

Man hat insonderheit bey den unbestimmten Aufgaben Gelegenheit, die Vortheile einer geschickten Benennung einzusehen und anzuwenden. Es sollen also hier noch einige weitere Reguln vom vortheilhaften Substituiren gegeben werden.

Um Brüche wegzuschaffen, darf man blos eine neue unbekannte Zahl substituiren, die mit dem vorigen Nenner multiplicirt ist.

Z. B. Bey $\frac{2x}{3}$ setze man nur $3y$ anstatt x, so kommt

$$\frac{2x}{3} = \frac{2 \cdot 3y}{3} = 2y$$

bey $\frac{ax}{b}$ setze man by für x, so kommt

$$\frac{ax}{b} = \frac{aby}{b} = ay$$

bey $\frac{ax}{5b}$ setze man 5by für x, so ist

$$\frac{ax}{5b} = \frac{a.\ 5by}{5b} = ay$$

Man darf also nur das Unbekannte mit dem Zähler multipliciren.

Wenn aber bey x noch eine addirte oder subtrahirte Zahl stehet, so muß auch in der Substitution eine Zahl addirt oder subtrahirt werden, damit das Ganze sich durch den Nenner dividiren lasse. Z. B. $\frac{x+5}{3}$

Z. B. Es sey $x = 3y + 1$, so ist

$$\frac{x+5}{3} = \frac{3y+1+5}{3} = \frac{3y+6}{3} = y+2$$

oder $x = 3y - 2$, so ist

$$\frac{x+5}{3} = \frac{3y-2+5}{3} = \frac{3y+3}{3} = y+1$$

oder $x = 3y + 4$, so ist

$$\frac{x+5}{3} = \frac{3y+4+5}{3} = \frac{3y+9}{3} = y+3$$

*) $\frac{2x+1}{3}$ Man setze $2x = 6y + 2$, so ist

$$\frac{2x+1}{3} = \frac{6y+2+1}{3} = \frac{6y+3}{3} = 2y+1$$

*) $\frac{5x-6}{11}$ Man setze $5x=55y-5$, so ist

$$\frac{5x-6}{11}=\frac{55y-5-6}{11}=5y-1$$

§. 38.

Ein Geübter weißt öfters noch besondere Vorbereitungen zu machen, ehe er substituiren kann.

Z. B. Es sey $\frac{6x+1}{5}$

weil $\frac{6x+1}{5}=x+\frac{x+1}{5}$ und hingegen nur die Brüche weggeschaft werden sollen, so setze man in $\frac{x+1}{5}$ das $x=5y+4$, so kommt

$$\frac{6x+1}{5}=\frac{30y+24+1}{5}=6y+5.$$

*) $\frac{7x-2}{3}$. Weil $\frac{7x-2}{3}=2x+\frac{x-2}{3}$ so sey $x=3y-1$, so ist

$$\frac{7x-2}{3}=\frac{21y-7-2}{3}=7y-3.$$

*) $\frac{4x+1}{5}$. Weil $\frac{4x+1}{5}=\frac{5x-x+1}{5}=x+\frac{1-x}{5}$ so sey $x=5y-4$, so ist

$$\frac{4x+1}{5}=\frac{20y-16+1}{5}=4y-3$$

*) $\frac{5x+2}{3}$. Weil $\frac{5x+2}{3} = \frac{6x-x+2}{3} = 2x + \frac{2-x}{3}$ so sey $x = 3y - 1$, so ist

$$\frac{5x+2}{3} = \frac{15y-5+2}{3} = 5y - 1.$$

§. 39.

Die geschickte und rechte Benennung lässet sich auch öfters durch Gleichsetzen und vermittelst des Calculs finden.

Z. B. $\frac{3x+1}{5}$ Es sey $3x = 5y + 4$

$$x = y + \frac{2y+4}{3}$$

es sey ferner $2y = 3v - 1$

$$y = v + \frac{v-1}{2}$$

ferner $v = 2z - 1$

So ist $y = 2z - 1 + \frac{2z-1-1}{2}$

$$y = 2z - 1 + z - 1 = 3z - 2$$

$$x = 3z - 2 + \frac{6z+4-4}{3}$$

$$x = 3z - 2 + 2z = 5z - 2$$

und $\frac{3x+1}{5} = \frac{15z-6+1}{5} = 3z - 1.$

*) 6x

*) $\frac{6x+1}{7}$. Es sey $6x=7y-2$

$$x=\frac{7y-2}{6}$$

$$y=6v+4$$

$$x=6v+4+\frac{6v+4+2}{6}=7v+5.$$

*) $\frac{5x+1}{8}$. Es sey $5x=8y+7$

$$x=y+1+\frac{3y+2}{7}$$

$$3y=5v+3$$

$$y=v+1+\frac{2v+1}{3}$$

$$2v=3z$$

$$v=z+\frac{z}{2}$$

$$z=2v$$

folgl. $v=2v+v=3v$

$$y=3v+1+\frac{6v}{3}=5v+1$$

$$x=5v+2+\frac{15v+3+2}{5}=8v+3$$

dann $\frac{5x+1}{8}=\frac{40v+15+1}{8}=5v+2.$

Man muß nemlich mit den folgenden Brüchen eben so, wie mit den vorhergehenden verfahren, und dieses so lange fortsetzen, bis kein Bruch mehr vorhanden ist. Alsdenn

 muß

muß man den gefundenen Werth abermal bey allen Buchstaben substituiren, bis man wieder auf x kommt.

§. 40.

Um die Vortheile und Nutzen einer solchen Benennung einzusehen, seyen folgende Aufgaben:

*) Man soll finden, welcher Zahl man $\frac{7x+6}{9}$ gleichsetzen müsse, wenn x kein Bruch seyn soll.

Es sey $\frac{7x+6}{9}$

$$7x = 9v + 3$$

$$x = \frac{9v+3}{7} = v + \frac{2v+3}{7}$$

$$2v = 7y + 4$$

$$v = 3y + 2 + \frac{y}{2}$$

$$y = 2z$$

$$v = 6z + 2 + \frac{2z}{2} = 7z + 2$$

$$x = 7z + 2 + \frac{14z + 4 + 3}{7} = 9z + 3$$

folgl. $\frac{7x+6}{9} = \frac{63z + 21 + 6}{9} = 7z + 3$

Nun läßt sich für $7z + 3$ leicht eine Zahl substituiren. Man nehme 2 an, so ist

$$\frac{7x + 6}{9} = 2.7 + 3 = 17$$
$$7x + 6 = 153$$
$$7x = 153 - 6$$
$$x = \frac{147}{7} = 21.$$

*) Man soll finden, welche Zahl man für $\frac{7x + 9}{17}$ setzen müsse, daß x kein Bruch werde.

Es sey $7x = 17v + 8$

$$x = 2v + 1 + \frac{3v + 1}{7}$$
$$3v = 7y + 6$$
$$v = 2y + 2 + \frac{y}{3}$$
$$y = 3z$$
$$v = 6z + 2 + \frac{3z}{3} = 7z + 2$$
$$x = 14z + 4 + 1 + \frac{21z + 6 + 1}{7} = 17z + 6$$

folgl. $\frac{7x + 9}{17} = \frac{119x + 42 + 9}{17} = 7x + 3.$

Also: eine nach Belieben angenommene Zahl multiplicirt man mit 7 und zum Produkt addirt man 3.

Man sehe unten am gehörigen Ort, wie durch eine geschickte Benennung auch bey Unreinen Quadratischen und Cubischen Gleichungen entweder sie selbst vermieden, oder ihre Auflösungen erleichtert werden können.

Anmerkung.

Noch dürfte hier nöthig seyn, ehe wir die Gleichungen selbst weiter abhandlen, einige in der Algebra durchaus unentbehrliche Lehren der Allgemeinen Rechenkunst vorzutragen, da die Fertigkeit darinnen jedem unentbehrlich ist, der in Algebraischen Aufgaben sich mit Erfolg üben will. Dies ist die Ursache, warum die zunächst folgende Kapitel nun hier eingeschaltet werden. Hieher gehört nun vordersamst die Rechnung mit Potenzen und Wurzelgrössen.

Das

Das dritte Kapitel.

Rechnung mit Potenzen und Wurzelgrössen.

§. 41.

Jede Grösse, z. B. a, in so ferne sie als einfach, und nicht zusammengesetzt angesehen wird, heißt die Erste Potenz, *Potentia Prima*, *Dignitas Prima*, *Primi Ordinis*. Wenn sie aber Einmal, Zweymal, Dreymal ꝛc. mit sich selbst multiplicirt wird, so wird das Produkt *Secundi*, *Tertii*, *Quarti Gradus*, oder, die Grösse wird zur Zweyten, Dritten, Vierten Potenz erhoben.

aa oder a^2 als das Faktum a mit a heißt Secunda Potentia.

a^4, als das Produkt von a. a. a. a ist die 4te Potenz von a.

Jene einfache Grösse, oder die wenigstens als eine solche betrachtet wird, heißt die Wurzel, *Radix*, jener Potenz. Z. B. a ist die Wurzel des 3ten Grades von a^3; 12 ist die Wurzel des vierten Grades (radix quarta) von 20736.

Wenn also eine Grösse zu einer gegebenen Potenz zu erheben ist, so muß sie so oft, weniger 1mal, mit sich selbst multiplicirt werden, so viel der Exponent jener Potenz Einheiten in sich begreift.

9^2, wird 9 einmal in sich selbst multiplicirt, $9 . 9 = 81$.

9^3 da wird 9 zweymal in sich selbst multiplicirt, $9 . 9 . 9 = 729$

$9^4 = 9 . 9 . 9 . 9 = 5861$

Also auch $\frac{1}{3}$ in Pot. $2 = \frac{1}{3} . \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

§. 42.

Wenn eine Grösse zu einer gegebenen Potenz zu erheben ist, so wird allen Buchstaben desselben der Exponent der Potenz beygeschrieben. Z. B.

die 5te Potenz von abc ist nicht abc^5, sondern $a^5 b^5 c^5$

die m Potenz von $\frac{ab}{cd}$ ist $\frac{a^m b^m}{c^m d^m}$

der Cubus von $\frac{2ab}{5cd} = \frac{8a^3 b^3}{125 c^3 d^3}$

Mehrtheilige Grössen, (Quantitates Complexæ) wenn sie nicht würklich multiplicirt und elevirt werden, werden in eine Parenthese, (besser als in einen Strich) eingeschlossen.

aa — bc in dignitate m heißt $\overline{aa - bc}^{\,m}$, oder besser, $(aa - bc)^m$.

Rechnung mit Potenzen.

§. 43.

Bey der Addition der Potenzen ist zu merken, daß, wenn solche vollkommen gleichartig sind, d. i. einerley Exponenten haben, man nur ihre Coefficienten (die vor den Buchstaben als Faktoren stehende

Zah-

Zahlen) zu einander addirt; die Exponenten aber unverändert läßt. Z. B.

$$3a^2 + 7a^2 = 10a^2$$
$$9c^4 + 5c^4 = 14c^4$$

Eben so werden auch bey der Subtraktion blos die Coefficienten von einander abgezogen.

$$5a^3 - 2a^3 = 3a^3$$
$$2a^4 - a^4 = a^4$$

Bey der Multiplication werden die Exponenten addirt, denn der Exponent zeigt an, wie oft die Grösse sey bey der Multiplication mit sich selbst vorhanden gewesen, und wenn man es würklich sezt, so erhellet, daß obige Abkürzung gegründet sey.

$$x^3 . x^5 = xxx . xxxxx = xxxxxxxx = x^8$$
$$4a^4 . 5a^6 = 20 . aaaa . aaaaaa . = 20 . aaaaaaaaaa = 20a^{10}$$
$$x^{\frac{1}{2}} . x^{\frac{2}{5}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{5}} = x^{\frac{5}{10}+\frac{4}{10}} = x^{\frac{9}{10}} = \sqrt[10]{x^9}$$
$$x^{\frac{1}{2}} . x^{\frac{n}{m}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{n}{m}} = x^{\frac{m+2n}{2m}} = \sqrt[2m]{x^{m+2n}}$$
$$x^{-\frac{1}{4}} . x^{\frac{1}{3}} = x^{-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}} = x^{-\frac{3}{12}+\frac{4}{12}} = x^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{x}$$
$$y^{\frac{1}{2}} . y^{-\frac{2}{3}} = y^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}} = y^{\frac{3}{6}+\frac{4}{6}} = y^{\frac{7}{6}} = \sqrt[6]{y^7} = y\sqrt[6]{y}.$$

Bey der Division werden aus dem nemlichen Grund die Exponenten von einander subtrahirt.

$$x^6 : x^4 = \frac{xxxxxx}{xxxx} = xx = x^2$$

$$y^m : y^n = y^{m-n}$$

$$\frac{y^{m+n}}{y^n} = y^{m+n-n} = y^m$$

$$y^{\frac{3}{4}} : y^{\frac{1}{2}} = y^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}} = y^{\frac{6}{8}-\frac{4}{8}} = y^{\frac{2}{8}} = y^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{y}$$

*) Eine sehr brauchbare Schrift hieher ist: De Generalibus Calculi Radicalis Regulis Commentatio Præſ. Matth. Aug. *Has.* Reſpond. M. Car. Traug. *Kretzſchmar.* Vitemb. 1769. Woraus auch unten einige Beyſpiele zur Uebung angeführt werden.

§. 44.

Aus dem bisherigen folgt unmittelbar das Schema:

$$\begin{array}{ccccccccc}
xxxx & xxx & xx & x & * \text{ Terminus.} & & & & \\
\| & \| & \| & \| & \| & & & & \\
x^4 & x^3 & x^2 & x^1 & x^0 & x^{-1} & x^{-2} & x^{-3} & x^{-4} \\
\| & \| & \| & \| & \| & \| & \| & \| & \| \\
\frac{xxxxx}{x} & \frac{xxxx}{x} & \frac{xxx}{x} & \frac{xx}{x} & \frac{x}{x} & \frac{x}{x^2} & \frac{x}{x^3} & \frac{x}{x^4} & \frac{x}{x^5} \\
 & & & & \| & \| & \| & \| & \| \\
 & & & & 1 & \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x^3} & \frac{1}{x^4}
\end{array}$$

Man ſiehet aus dem Wachſen und Abnehmen dieſer Tabelle, daß $x^0 = 1$ und jederzeit eine Potenz mit einem negativen Exponenten einem Bruch gleich iſt, der 1 zum Zähler, und die Potenz

Potenz mit dem positiven Exponenten zum Nenner hat.

Also $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$

$2^{-1} = \frac{1}{2}$

$1^{-1} = \frac{1}{1}$

Anderer Beweis, daß $a^0 = 1$.

Man dividire a^m durch a^m, so ist $\frac{a^m}{a^m} = 1$.

man dividire aber würklich, so ist $\frac{a^m}{a^m} = a^{m-n} = a^0$

folglich $a^0 = 1$.

Anderer Beweis, daß $ba^{-m} = \frac{b}{a^m}$

Man multiplicire ba^{-m} mit ba^{2m}, so ist das Produkt b^2a^m, wenn man nun dieses Produkt b^2a^m durch einen von den Faktoren, nemlich durch ba^{2m} dividirt, so kommt der andere Faktor oder ba^{-m}, das ist $\frac{b^2a^m}{ba^{2m}} = ba^{-m}$

Nun hebe man diesen Bruch $\frac{b^2a^m}{ba^{2m}}$ durch ba^m auf,

so kommt $\frac{b}{a^m} = ba^{-m}$

folglich ist auch $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

§. 45.

§. 45.

Wenn eine Potenz oder Dignität zu einer anderen Potenz zu erheben ist, so darf man nur die Exponenten mit einander multipliciren.

Z. B. Man soll x^1 ins Quadrat erheben.

$x^{1 \cdot 2} = x.x = x^2$

Man soll x^2 in den Cubus erheben.

$x^{2 \cdot 3} = xx.xx.xx = x^6$

x^5 in den Cubus.

$x^{5 \cdot 3} = xxxxx.xxxxx.xxxxx = x^{15}$

Ueberhaupt x^m zur Dignität x^n

x^{mn}

In Zahlen muß man die Multiplication der Potenz selbst würklich vornehmen, bis man unten andere Vortheile lernt.

$z^{\frac{1}{3}}$ zur Pot. 5. $= z^{\frac{1}{3} \cdot 5} = z^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{z^5}$

$z^{-\frac{1}{2}}$ zur Pot. 6 $= z^{-\frac{1}{2} \cdot 6} = z^{-\frac{6}{2}} = \sqrt[2]{z^{-6}} = \sqrt{\frac{1}{z^6}}$

$z^{-\frac{1}{n}}$ zur Pot. $\frac{r}{s} = z^{-\frac{1}{n} \cdot \frac{r}{s}} = z^{\frac{-r}{ns}} = \sqrt[ns]{z^{-r}} = \sqrt[ns]{\frac{1}{z^r}}$

§. 46.

Wenn aus einer Potenz eine verlangte Wurzel zu extrahiren ist, so darf man nur die Exponenten mit der Zahl der Wurzel dividiren.

Z. B. Man soll aus $a^2 b^6$ die Quadratwurzel extrahiren

$a^{\frac{2}{2}} b^{\frac{6}{2}} = ab^3$

die

die Cubicwurzel aus $a^6 b$

$a^{\frac{6}{3}} b^{\frac{1}{3}} = a^2 b^{\frac{1}{3}}$

man kann also hier nicht ganz ausziehen.

überhaupt $\sqrt[m]{}$ aus $\frac{a^p b^q}{cd^n} = \frac{a^{\frac{p}{m}} b^{\frac{q}{m}}}{c^{\frac{1}{m}} d^{\frac{n}{m}}}$

$\sqrt[n]{x^r} = x^{\frac{r}{n}}$

Folglich kann man es auch umkehren:

weil $\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$ so ist auch

$x^5 = \sqrt[3]{x^{15}}$

Wo man wirklich extrahiren kann, so geschieht es, und ist es sehr vorträglich, wenn man die Zahl der Dignität in dazu schickliche Faktoren zerfällen kann.

$\sqrt{9 \cdot 4} = 3 \cdot 2$ $\qquad \sqrt[3]{27 \cdot 8} = 3 \cdot 2$

$\sqrt[3]{x^4 y^3} = y\sqrt[3]{x^4} = y \cdot x^{\frac{4}{3}}$

Es kann diese Regel auch algebraisch gefunden werden.

Z. B. es sey aus u^n die Wurzel m zu extrahiren.

Man setze $\sqrt[m]{u^n} = u^x$

so ist $u^n = u^{mx}$

$n = mx$

$x = \frac{n}{m}$

folgl.

folgl. $u^x = u^{\frac{n}{m}}$

folgl. auch $\sqrt[m]{u^n} = u^{\frac{n}{m}}$

Wenn also aus $u^n = \frac{c^p d^r}{b^s}$ die $\sqrt[m]{}$ zu extrahiren ist, so muß jeder von den Exponenten durch m dividirt werden;

$$\text{also } \sqrt[m]{u^n} = \frac{c^{\frac{p}{m}} d^{\frac{r}{m}}}{b^{\frac{s}{m}}} = \frac{\sqrt[m]{c^p d^r}}{b^s} = \frac{\sqrt[m]{c^p}.\sqrt[m]{d^r}}{\sqrt[m]{b^s}} = u^{\frac{n}{m}}$$

Da $u^{\frac{n}{m}}$ die Wurzel ist, so muß, statt der Probe u^n wieder herauskommen, wenn man es zur Dignität m elevirt $= u^{\frac{n.m}{m}} = u^n$.

§. 47.

Es lassen sich auch verschiedene Wurzelgrössen (Radicalia diversorum Ordinum) leicht auf einerley Benennung bringen, wenn man beyderley Exponenten mit einer gemeinschaftlichen Zahl multiplicirt.

Z. B. $\sqrt[n]{c^r d^q} = \sqrt[mn]{c^{mr} d^{mq}}$
denn der Werth eines Bruches bleibt derselbe, wenn man Zähler und Nenner durch einerley Zahl multiplicirt, welches hier statt findet, da

$\sqrt[n]{c^r d^q} = c^{\frac{r}{u}} d^{\frac{q}{n}}$

Es sind also $\sqrt[n]{c^r d^q}$ und $\sqrt[m]{c^h d^s}$
mit $\sqrt[mn]{c^{rm} d^{qm}}$ und $\sqrt[mn]{c^{hn} d^{sn}}$ unter einerley Benennung gebracht.

Es sey $n=3$, $r=1$, $q=1$, so ist

$$\sqrt[n]{c^r d^q} = \sqrt[3]{cd}$$

$m=5$, $h=1$, $s=2$, so ist

$$\sqrt[m]{c^h d^s} = \sqrt[5]{cd^2}$$

es ist also

$$\sqrt[mn]{c^{rm} d^{qm}} = \sqrt[15]{c^5 d^5} \text{ und}$$

$$\sqrt[nm]{c^{hn} d^{sn}} = \sqrt[15]{c^3 d^6}$$

Eben dieses hätte man aber auch also ausdrükken können:

$$\sqrt[3]{cd} = c^{\frac{1}{3}} d^{\frac{1}{3}} \text{ und } \sqrt[5]{cd^2} = c^{\frac{1}{5}} d^{\frac{2}{5}}$$

folgl. $c^{\frac{5}{15}} d^{\frac{5}{15}} = c^{\frac{1}{3}} d^{\frac{1}{3}} = \sqrt[15]{c^5 d^5}$

und $c^{\frac{3}{15}} d^{\frac{6}{15}} = c^{\frac{1}{5}} d^{\frac{2}{5}} = \sqrt[15]{c^3 d^6}$

*) $\sqrt[3]{a^2}$ und $\sqrt[4]{b^3} = \sqrt[3\cdot 4]{a^{2\cdot 4}}$ u. $\sqrt[4\cdot 3]{b^{3\cdot 3}} = \sqrt[12]{a^8}$ u. $\sqrt[12]{b^9}$.

§. 48.

Man bringt nemlich die Wurzelgrössen vorzüglich deswegen unter einerley Benennung, daß man sie hernach schicklicher addiren, subtrahiren, multipliciren und dividiren kann.

Z. B. $\sqrt[m]{x^n}$ und $\sqrt[r]{x^s}$

$$\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}} \text{ und } \sqrt[r]{x^s} = x^{\frac{s}{r}}$$

$$\frac{n}{m} \text{ und } \frac{s}{r} = \frac{nr}{mr} \text{ und } \frac{ms}{mr}$$

folgl. $\sqrt[m]{x^n}$ und $\sqrt[r]{x^s} = \sqrt[mr]{x^{nr}}$ und $\sqrt[mr]{x^{ms}}$

§. 49.

Beyspiele von Multiplication und Division.

*) Es sey zu multipliciren $\sqrt[n]{c^r d^q}$ mit $\sqrt[m]{c^h d^s}$

Unter einerley Benennung:

$$= \sqrt[nm]{c^{rm} d^{qm}} \cdot \sqrt[mn]{c^{hn} d^{sn}}$$

Produkt $= \sqrt[mn]{c^{rm+hn} d^{qm+sn}}$

Eben dieses findet man auch also:

$$\sqrt[n]{c^r d^q} \cdot \sqrt[m]{c^h d^s} = c^{\frac{r}{n}} d^{\frac{q}{n}} \cdot c^{\frac{h}{m}} d^{\frac{s}{m}}$$

$$= c^{\frac{r}{n}+\frac{h}{m}} d^{\frac{q}{n}+\frac{s}{m}}$$

und diese Brüche unter einerley Benennung

$$= c^{\frac{rm+hn}{nm}} d^{\frac{qm+sn}{mn}}$$

$$= \sqrt[mn]{c^{rm+hn} d^{qm+sn}}$$

Eben

Eben dieses findet man auch noch ferner also:

Es sey $\sqrt[mn]{c^{rm} d^{qm}} . \sqrt[mn]{c^{hn} d^{sn}} = x$

$$\sqrt[mn]{c^{rm} d^{qm}} = \frac{x}{\sqrt[mn]{c^{hn} d^{sn}}}$$

Es werden beyde Glieder zur Dignität mn elevirt:

$$c^{rm} d^{qm} = \frac{x^{mn}}{c^{hn} d^{sn}}$$

$$c^{rm + hn} d^{qm + sn} = x^{mn}$$

$$\sqrt[mn]{c^{rm + hn} d^{qm + sn}} = x$$

Es sey $n = 3$, $r = 1$, $q = 1$, $m = 5$, $h = 1$, $s = 2$ man verlangt das Faktum

$\sqrt[3]{c^1 d^1} . \sqrt[5]{c^1 d^2}$ oder $\sqrt[3]{cd} . \sqrt[5]{cd^2}$

so kommt

$$\sqrt[15]{c^5 d^5} . \sqrt[15]{c^3 d^6} = \sqrt[15]{c^{5+3} d^{5+6}} = \sqrt[15]{c^8 d^{11}}.$$

*) Man verlangt das Faktum von $m + n$ in $\sqrt{\frac{c^2 d}{m^2 + n^2}}$

$$(m + n) \sqrt{\frac{c^2 d}{m^2 + n^2}} = \sqrt{\frac{c^2 d (m^2 + 2mn + n^2)}{m^2 + n^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{c^2 d (m + n)(m + n)}{(m + n)(m - n)}}$$

$$= c \sqrt{\frac{dm + dn}{m - n}}$$

Haas, l. c. p. 13. 14.

*) Es sey zu dividiren $\frac{\sqrt[n]{c^r d^q}}{\sqrt[m]{c^h d^s}}$

unter einerley Benennung $\frac{\sqrt[mn]{c^{rm} d^{qm}}}{\sqrt[mn]{c^{hn} d^{sn}}}$

$$= c^{\frac{rm - hn}{mn}} d^{\frac{qm - sn}{mn}} = \sqrt[mn]{c^{rm - hn} d^{qm - sn}}$$

Eben dieses findet man auch also:

$$\frac{\sqrt[n]{c^r d^q}}{\sqrt[m]{c^h d^s}} = \frac{c^{\frac{r}{n}} d^{\frac{q}{n}}}{c^{\frac{h}{m}} d^{\frac{s}{m}}} = c^{\frac{r}{n} - \frac{h}{m}} d^{\frac{q}{n} - \frac{s}{m}}$$

$$= c^{\frac{rm - hn}{mn}} d^{\frac{qm - sn}{mn}} = \sqrt[mn]{c^{rm-hn} d^{qm-sn}},$$

Auch findet man eben dieses also:

Es sey $\frac{\sqrt[mn]{c^{rm} d^{qm}}}{\sqrt[mn]{c^{hn} d^{sn}}} = x$

$$\sqrt[mn]{c^{rm} d^{qm}} = x \sqrt[mn]{c^{hn} d^{sn}}$$

$$c^{rm} d^{qm} = x^{mn} c^{hn} d^{sn}$$

$$c^{rm - hn} d^{qm - sn} = x^{mn}$$

$\sqrt[mn]{c^{rm - hn} d^{qm - sn}} = x$ wie oben.

Es sey $n = 3$, $r = 1$, $q = 1$, $m = 5$, $h = 1$, $s = 2$, so ist

$\sqrt[n]{c_r}$

$$\frac{\sqrt[n]{c^r d^q}}{\sqrt[m]{c^h d^s}} = \frac{\sqrt[3]{cd}}{\sqrt[5]{cd^2}} = \frac{\sqrt[15]{c^5 d^5}}{\sqrt[15]{c^3 d^6}} = \sqrt[15]{c^{5-3} d^{5-6}}$$

$$= \sqrt[15]{c^2 d^{-1}}$$

$$= \sqrt[15]{\frac{c^2}{d}}$$

Haas. l. c. p. 16. 17.

*) Man verlangt den würklichen Quotienten von

$$\frac{\sqrt[2q]{f^n d^{3m} p^2}}{\sqrt[q]{f^{2n} d^m p}}$$

aus diesem entstehet

$$f^{\frac{n}{2q}} d^{\frac{3m}{2q}} p^{\frac{1}{q}} : f^{\frac{2n}{q}} d^{\frac{m}{q}} p^{\frac{1}{q}}$$

wenn man nun nach der Regul die Exponenten des Divisors von den Exponenten des Dividends abzieht, so ist

$$\frac{f^{\frac{n}{2q}}}{f^{\frac{2n}{q}}} = f^{\frac{n}{2q} - \frac{2n}{q}} = f^{\frac{qn - 4qn}{2qq}} = f^{\frac{-3qn}{2q}}$$

und $$\frac{d^{\frac{3m}{2q}}}{d^{\frac{m}{q}}} = d^{\frac{3m}{2q} - \frac{m}{q}} = d^{\frac{3mq - 2mq}{2qq}} = d^{\frac{m}{2q}}$$

und $$\frac{p^{\frac{1}{q}}}{p^{\frac{1}{q}}} = p^{\frac{1}{q} - \frac{1}{q}} = p^0 = 1$$

 folgl.

folglich $\dfrac{f^{\frac{n}{2q}}\, d^{\frac{3m}{2q}}\, p^{\frac{1}{q}}}{f^{\frac{2n}{q}}\, d^{\frac{m}{q}}\, p^{\frac{1}{q}}} = f^{\frac{-3n}{2q}}\, d^{\frac{m}{2q}}\, p^{0}$

es ist aber $f^{\frac{-3n}{2q}} = \dfrac{1}{f^{\frac{3n}{2q}}}$

Wenn man nun dieses multiplicirt durch

$d^{\frac{m}{2q}} . 1$

so kommt

$$\frac{1}{f^{\frac{3n}{2q}}} . d^{\frac{m}{2q}} = \frac{d^{\frac{m}{2q}}}{f^{\frac{3n}{2q}}} = \frac{\sqrt[2q]{d^m}}{\sqrt[2q]{f^{3n}}} = \sqrt[2q]{\frac{d^m}{f^{3n}}} = \sqrt[2q]{f^{-3n} d^m} .$$

Haas. l. c. p. 17. 18.

*) Es sey würklich zu dividiren

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{p^2}{d} f^5} . \sqrt[4]{pf^3}}{\sqrt{\frac{pd^2}{f}}}$$

dieses gibt $p^{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}\, d^{-\frac{1}{3}-1}\, f^{\frac{5}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}$

und die Exponenten unter einerley Benennung gebracht

$$= p^{\frac{16+6-12}{[illegible]}}\, d^{\frac{-1-3}{3}}\, f^{\frac{40+18+12}{24}}$$

= p

$$= p^{\frac{5}{12}} d^{-\frac{4}{3}} f^{\frac{35}{12}}$$

$$= \frac{p^{\frac{5}{12}} f^{\frac{35}{12}}}{d^{\frac{4}{3}}}$$

$$= \frac{\sqrt[12]{p^5 f^{35}}}{\sqrt[3]{d^4}}$$, und, weil $f^{35} = f^{24+11}$

so kann man f^{24} vor das Radicalzeichen $\sqrt[12]{}$ bringen, und man erhält:

$$= \frac{f^2 \sqrt[12]{p^5 f^{11}}}{d \sqrt{d}}$$

Haas. l. c. p. 18.

§. 50.

Weitere Beyspiele zur Uebung.

Multiplication.

*) $\frac{p}{q} \cdot \frac{a}{b} \sqrt[n]{\frac{c}{d}} = \frac{ap}{bq} \sqrt[n]{\frac{cq^n}{dp^n}}$

oder $\frac{aq}{bp} \sqrt[n]{\frac{cp^n}{dq^n}}$ dann $\frac{q}{p} \sqrt[n]{\frac{p^n}{q^n}} = \sqrt[n]{\frac{q^n p^n}{p^n q^n}} = 1$

*) $x^2 y^3 \cdot x^4 y^{\frac{1}{2}} = x^{2+4} y^{3+\frac{1}{2}} = x^6 y^{\frac{6+1}{2}} =$

$= x^6 y^{\frac{7}{2}} = x^6 \sqrt{y^7}$

$\sqrt{8} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{144} = 12$

$\sqrt{ab} \cdot \sqrt[3]{a^2 b} = \sqrt[6]{a^3 b^3} \cdot \sqrt[6]{a^4 b^2} = \sqrt[6]{a^7 b^5}$

$2b\sqrt{cd} \cdot 4b\sqrt{cd} = 8b^2 \sqrt{c^2 d^2} = 8b^2 cd$

Division.

$$x^3y : x^4y^2 = x^{3-4}y^{1-2} = x^{-1}y^{-1} =$$
$$\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{xy}$$

$$6\sqrt{ab} : 3\sqrt{b} = 2\sqrt{a}$$

$$\sqrt[6]{c^2d^2} : \sqrt[6]{c^3d^3} = \sqrt[6]{c^{2-3}d^{2-3}} = \sqrt[6]{\frac{1}{cd}}$$

$$\sqrt{\sqrt{8}} : \sqrt{\sqrt{2^2}} = \sqrt{2}$$

Elevation.

$2\sqrt{3}$ ins Quadrat $(2\sqrt{3})^2 = (\sqrt[2]{3 \cdot 4})^2 =$
$$\sqrt[2:2]{12} = \sqrt[1]{12} = 12.$$

Extraction.

Aus $\sqrt[3]{c}$ die Quadratwurzel $= \sqrt{\sqrt[3]{c}} = \sqrt[2 \cdot 3]{c} = \sqrt[6]{c}$

Aus $2\sqrt[3]{4}$ die Quadratwurzel $= \sqrt{(2\sqrt[3]{4})} =$
$$= \sqrt{(\sqrt[3]{4 \cdot 8}} = \sqrt[3 \cdot 2]{32} = \sqrt[6]{32}$$

Aus $\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$ die Wurzel $\sqrt[v]{\ } = \sqrt[nv]{\frac{a^n c}{b^n d}}$

Das

Das vierte Kapitel.

Von den arithmetischen Progressionen.

§. 51.

Aus mehreren stetigen arithmetischen Proportionen entstehet eine arithmetische Progression, nemlich also, daß man die doppelt vorhandene Glieder nur Einmal sezt.

Z. B. Aus 4 — 6 = 6 — 8
8 — 10 = 10 — 12
12 — 14 = 14 — 16
16 — 18 = 18 — 20 ꝛc. entstehet
4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20.

Aus 30 — 26 = 26 — 22
22 — 18 = 18 — 14
14 — 10 = 10 — 6 ꝛc. entstehet
30. 26. 22. 18. 14. 10. 6.

Es gibt also eine aufsteigende und absteigende arithmetische Progression, je nachdem man nemlich die Differenz immer addirt oder immer subtrahirt.

Und man kann auch eine arithmetische Progression rückwärts fortsetzen:

Z. B. Wie man sagt
0. 2. 4. 6. 8. 10. 12. ꝛc.
so kann man auch sagen
—12. —10. —8. —6. —4. —2. 0. 2. 4. 6. 8. 10. 12.

§. 52.

Der allgemeine Ausdruck einer arithmetischen Progression ist dieser: (wo a das erste Glied und d die Differenz bedeutet) und die Progression wachsend ist.

a. a + d. a + 2d. a + 3d. a + 4d. a + 5d. a + 6d. ꝛc.
I. II. III. IV. V. VI. VII.

Hieraus erhellet:

1.) daß ein jedes Glied entstehet, wenn man die Differenz mit einer Zahl multipliciret, die um 1. geringer ist, als das Glied der Ordnung nach ist, und hernach dieses Produkt zum ersten Glied addiret.

Z. B. bey dem 6ten Glied muß d mit 5 multiplicirt seyn, so erhält man a + 5d.

2.) Man weißt sogar einen Ausdruck für das lezte Glied, wenn es auch noch so weit entfernt wäre, und darf die Progression daher nicht mühsam bis dorthin fortsetzen; Es ist nemlich das Lezte Glied jedesmal die Summe des Ersten Gliedes und der Differenz, welche leztere einen Coefficienten hat, der um 1. weniger ist, als die Zahl der Stellen oder der Zeiger. Wenn u = Leztes Glied, und n = Zahl der Stellen, so ist

$u = a + (n - 1) d$ die Formul für das lezte Glied.

3.) Es erhellet auch, wie man eine fallende oder abnehmende arithmetische Progression bezeichnen müsse; sie ist

u. u — d. u — 2d. u — 3d. ..... u — (n — 1) d.

4.) Die

4.) Die Zahl der Glieder, das gegenwärtige mitgerechnet, sey $= n$, so ist

Bey einer wachsenden arithmetischen Progression (da man jedes Glied als das lezte ansehen und davon zurückzählen kann,)
jedes Glied $= a + (n - 1) d.$
das vorhergehende $= a + (n - 2) d.$
das weitervorhergehende $= a + (n - 3) d.$

Bey einer fallenden arithmetischen Progression,
jedes Glied $= u - (n - 1) d.$
das vorhergehende $= u - (n - 2) d.$
das weitervorhergehende $= u - (n - 3) d.$

5.) Es erhellet, daß die Summe der äussersten Glieder, und der von den äussersten gleichweit abstehenden Glieder allemal einander gleich sey. Ist aber die Zahl der Glieder ungleich, so ist das mittlere Glied doppelt genommen jener Summe gleich.

Es sey
$a. a+d. a+2d. a+3d. a+4d. a+5d.$
1. 2. 3. 4. 5. 6.
die Summe des
1. und 6. $= a + a + 5d = 2a + 5d$
2. u. 5. $= a + d + a + 4d = 2a + 5d$
3. u. 4. $= a + 2d + a + 3d = 2a + 5d$

Ferner sey
$a. a+d. a+2d. a+3d. a+4d.$
1. 2. 3. 4. 5.
nro. $1 + 5 = a + a + 4d = 2a + 4d.$
$2 + 4 = a + d + a + 3d = 2a + 4d.$
$3 + 3 = a + 2d + a + 2d = 2a + 4d.$

6.) Das

6.) Das halbe Produkt aus der Summe des ersten und lezten Gliedes in die Anzahl aller Glieder gibt die Summe der arithmetischen Progression.

oder $s = \frac{n(a+u)}{2}$

oder $s = (a+u)\frac{1}{2}n$ die gewöhnlichste Formul.

oder $s = a + a(n-1)d.\frac{1}{2}n$

$$\begin{array}{l} a \\ a+d \\ a+2d \\ a+3d \\ a+4d \\ a+5d \\ \hline 6a+15d = \text{Summe.} \end{array} \qquad \frac{(a+a+5d)6}{2} \quad \frac{(2a+5d)6}{2} \quad \frac{12a+30d}{2} = 6a+15d$$

$$\begin{array}{r} a \\ a+5d \\ \hline 2a+5d \\ 3 = \frac{1}{2}n \\ \hline 6a+15d \end{array}$$

Man kann aber dieses auch auf eine andere artige Art herausbringen: Man schreibe die Progression ordentlich hin, und unter diese die nemliche Progression wieder, aber rückwärts, und addire Glied vor Glied, so bekommt man lauter gleiche Glieder:

2.	5.	8.	11.	14.	17.	20.	23.	26.	29.
29.	26.	23.	20.	17.	14.	11.	8.	5.	2.
31.	31.	31.	31.	31.	31.	31.	31.	31.	31.

Offenbar ist die Summe der gefundenen untersten Reihe 2mal so groß, als die Summe unserer Progression.

Die Anzahl der Glieder ist 10, also die Summe aller dieser Glieder = 10.31. und die

Summe

Summe der ganzen arithmetischen Progression $= \frac{10 \cdot 31}{2}$, oder, unserer vorigen Formul gemäß $= \frac{(2 + 29)}{2} 10 = 155$.

7.) Wenn das Erste Glied $= 1$, so ist das lezte Glied $= 1 + (n - 1)d$; hiezu das erste Glied addirt $= 2 + (n - 1)d$; mit der Zahl der Glieder multiplicirt $= 2n + n(n - 1)d$, folglich die Summe selbst $= n + \frac{n(n - 1)d}{2}$.

Wenn nun $a = 1$, so gibt Euler, (Teutsche Algebra I. §.424.) folgende Formuln für folgende Differenzen.

Nemlich: wenn $a = 1$. und wenn

$d = 1$. so ist die Sumе $= \frac{n + n(n-1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$

$d = 2$ . . . . $\frac{n + 2n(n-1)}{2} = n^2$

$d = 3$ . . . . $\frac{n + 3n(n-1)}{2} = \frac{3n^2 - n}{2}$

$d = 4$ . . . . $\frac{n + 4n(n-1)}{2} = 2n^2 - n$

$d = 5$ . . . . $\frac{n + 5n(n-1)}{2} = \frac{5n^2 - 3n}{2}$

$d = 6$ . . . . $\frac{n + 6n(n-1)}{2} = 3n^2 - 2n$

$d = 7$ . . . . $\frac{n + 7n(n-1)}{2} = \frac{7n^2 - 5n}{2}$

$d = 8$ . . . . $\frac{n + 8n(n-1)}{2} = 4n^2 - 3n$

$d=9 \ldots\ldots\ldots \frac{n+9n(n-1)}{2}=\frac{9n^2-7n}{2}$

$d=10 \ldots\ldots\ldots \frac{n+10n(n-1)}{2}=5n^2-4n$

§. 53.

Man hat oben die Formel gefunden:

$s=(a+u)\frac{1}{2}n$ hieraus folgt weiter:

$2s=na+nu$

$n=\frac{2s}{a+u}$ = Formel für die Zahl der Glieder.

$na+nu=2s$

$nu=2s-na$

$u=\frac{2s-na}{n}$ = Formel für das lezte Glied.

Man fand ferner schon oben

$u=a+(n-1)d$ = bessere Formel für das lezte Glied.

$u=a+nd-d$

$u-a=nd-d$

$\frac{u-a}{n-1}=d.$ = Formel für die Differenz.

$\frac{u-a}{n-1}=d$

$u-a=nd-d$

$u=nd-d+a$

$u-(n-1)d=a$ = Formel für das Erste Glied.

Wenn $a=d$, so ist

statt $u=a+nd-d$ nun $u=a+na-a=na$;

und statt $s=\frac{1}{2}an+\frac{1}{2}un$ nun $s=\frac{1}{2}an(n+1)$

aus

aus obigem $u - a = nd - d$

folgt auch $n = \dfrac{u + d - a}{d}$ = Formel für die Zahl der Glieder.

Z. B. Es sey 2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 10. 18. 20.

$$s = (a + u)\tfrac{1}{2}n = (2 + 20)\,5 = 110$$

oder hier auch

$$s = \tfrac{1}{2}an(n + 1) = 1 \cdot 10 \cdot 11 = 110.$$

$$n = \frac{2s}{a + u} = \frac{220}{22} = 10$$

$$u = \frac{2s - na}{n} = \frac{220 - 20}{10} = \frac{200}{10} = 20$$

$$u = a + nd - d = 2 + 20 - 2 = 20$$

$$a = \frac{u - a}{n - 1} = \frac{20 - 2}{10 - 1} = \frac{18}{9} = 2$$

$$n = \frac{u + d - a}{d} = \frac{20 + 2 - 2}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

§. 54.

Aus den bisherigen Formeln lassen sich nun leicht noch mehrere andere finden.

*) Aus a, d, und n, läßt sich s finden.

D. i. aus dem Ersten Glied, der Differenz und der Zahl der Glieder die Summe.

$$\begin{array}{l} n - 1 \\ \quad\; d \\ \hline nd - d + a = \text{leztes Glied} \\ \qquad\quad + a \\ \hline nd - d + 2a \\ \qquad\quad \tfrac{1}{2}n \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{n^2 - nd + 2an}{2} = s = \text{Neue Formel für die Summe.}$$

*) Aus

*) Aus d, n, s, kann man a finden.
d. i. aus der Summe, der Differenz, und aus der Zahl der Glieder, das Erste.

Es sey das Erste Glied = x

$n - 1$

d

$nd - d + x$ leztes Glied.

$+ x$

$nd - d + 2x$

$\frac{1}{2}n$

$$\frac{n^2d - nd + 2nx}{2} = s$$

$$-nd + 2nx = 2s - n^2d$$

$$2nx = 2s - n^2d + nd$$

$$x = \frac{2s - n^2d + nd}{2n} = a$$ = neue Formel für das erste Glied.

*) Aus a, n, s, die Differenz d.

$n - 1$

d

$nd - d + 2a$

$\frac{1}{2}n$

$$\frac{n^2d - nd + 2na}{2} = s$$

$$n^2d - nd + 2na = 2s$$

$$n^2d - nd = 2s - 2na$$

$$d = \frac{2s - 2na}{n^2 - n}$$ = Neue Formel für die Differenz.

*) Aus a, u, und d läßt sich s und n finden,
d. i. aus dem ersten und lezten Glied und der Differenz, die Zahl der Glieder und die Summe.

Man

Man nenne $n = x$
$s = y$

$$\begin{array}{l} x - 1 \\ \quad d \\ \hline xd - d \end{array}$$

$$xd - d + a = u$$
$$xd - d = u - a$$
$$xd = u - a + d$$
$$x = \frac{u - a + d}{d}$$

ferner

$$\begin{array}{l} xd - d + a \\ \qquad + a \\ \hline xd - d + 2a \\ \qquad \tfrac{1}{2}x \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{x^2 d + xd + 2ax}{2} = y = s =$$ Neue Formel für die Summe.

*) Aus a, u, und s läßt sich n und d finden.

D. i. aus dem ersten und lezten Glied und der Summe, die Zahl der Glieder und die Differenz.

Man nenne $n = x$
$d = y$

$$\begin{array}{l} x - 1 \\ \quad y \\ \hline \end{array}$$

$$xy - y + a = u$$
$$xy - y = u - a$$
$$x = \frac{u - a + y}{y}$$

$$\frac{ax + ux}{2} = s$$
$$ax + ux = 2s$$
$$x = \frac{2s}{a + u}$$

$$\frac{2s}{a+u} = \frac{u-a+y}{y}$$

$$\frac{2sy}{a+u} = u-a+y$$

$$2sy = (a+u)(u-a+y)$$

$$2sy = u^2 - a^2 + ay + uy$$

$$2sy - uy - ay = u^2 - a^2$$

$$y = \frac{u^2 - a^2}{2s - u - a} = d =$$ Neue Formel für die Differenz.

$$\begin{array}{r} u - a + y \\ a + u \\ \hline u^2 - au + uy \\ au - a^2 + ay \\ \hline u^2 - a^2 + ay + uy \end{array}$$

*) Aus a, d und s läßt sich n und u finden.

D. i. aus dem ersten Glied, der Differenz und der Summe, die Zahl der Glieder und das lezte Glied.

Man nenne $n = x$
$u = y$

$$\begin{array}{r} x - 1 \\ d \\ \hline xd - d \end{array}$$

$$xd - d + a = y$$

$$\frac{xa + xy}{2} = s$$

$$xa + xy = 2s$$

$$xy = 2s - xa$$

$$y = \frac{2s - xa}{x}$$

$$\frac{2s - xa}{x} = a + dx - d$$

$$2s - xa = xa + dx^2 - dx$$

mit

mit d dividirt

$$\frac{2s}{d} = \frac{2ax + dx^2 - dx}{d}$$

$$\frac{2s}{d} = x^2 + \frac{(2a - d)x}{d}$$

(Unreine Quadratische Gleichung, deren Auflösung unten gelehret wird.)

Man substituire $\frac{2a - d}{d} = m$

$$\frac{2s}{d} = x^2 + mx$$

$$\frac{2s}{d} + \tfrac{1}{4}m^2 = x^2 + mx + \tfrac{1}{4}m^2$$

$$\sqrt{\left(\frac{2s}{d} + \tfrac{1}{4}m^2\right)} = x + \tfrac{1}{2}m$$

$$\sqrt{\left(\frac{2s}{d} + \tfrac{1}{4}m^2\right)} - \tfrac{1}{2}m = x.$$

*) Aus d, u und s läßt sich a und n finden. D. i. aus der Differenz, dem lezten Glied und der Summe, das erste Glied und die Zahl der Glieder.

Man setze $a = x$
$n = y$

$$\frac{xy + uy}{2} = s \qquad \frac{y - 1}{d}$$

$$xy + uy = 2s \qquad dy - d$$

$$x = \frac{2s - uy}{y} \qquad dy - d + x = u$$

$$x = u - dy + d$$

$$\frac{2s - uy}{y} = u - dy + d$$

$$2s - uy = uy - dy^2 + dy$$

$$dy^2 - 2uy - dy = -2s$$

mit d dividirt

$$y^2 - \frac{(2u-d)y}{d} = -\frac{2s}{d}$$

Nun sey $\frac{2u-d}{d} = m$

$$y^2 - my = -\frac{2s}{d} \text{ (unr. quadr. Gleich.)}$$

$$y^2 - my + \tfrac{1}{4}m^2 = \tfrac{1}{4}m^2 - \frac{2s}{d}$$

$$y - \tfrac{1}{2}m = \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 - \frac{2s}{d})}$$

$$y = \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 - \frac{2s}{d})} + \tfrac{1}{2}m$$

$$y = \frac{2u+d}{d} \pm \sqrt{(\frac{4u^2+4ud+d^2}{4d^2} - \frac{2s}{d})}$$

$$y = \frac{2u+d \pm \sqrt{(4u^2+4ud+d^2-8ds)}}{2d}$$

$$x = u + d - u - \tfrac{1}{2}d \pm \sqrt{(4u^2+4ud+}$$
$$+ d^2 - 8sd)$$
$$= \tfrac{1}{2}d \mp \sqrt{(4u^2+4ud+d^2-8sd)}$$

*) Aus s, n, und au läßt sich a und u finden.

D. i. Aus der Summe, der Zahl der Glieder, und dem Produkt des ersten und lezten Gliedes läßt sich das erste und lezte Glied selbst finden.

Man nenne das Produkt $= p$
$a = x$
$u = y$

$$\frac{xn + yn}{2} = s \qquad xy = p$$

$$y = \frac{p}{x}$$

$$xn + yn = 2s$$

$$yn = 2s - xn$$

$$y = \frac{2s}{n} - x$$

$$\frac{p}{x} = \frac{2s}{n} - x$$

$$p = \frac{2sx}{n} - x^2$$

$$x^2 - \frac{2sx}{n} = -p \text{ (unr. quadr. Gleich.)}$$

$$x^2 - \frac{2sx}{n} + \frac{s^2}{n^2} = \frac{s^2}{n^2} - p$$

$$x - \frac{s}{n} = \sqrt{\left(\frac{s^2}{n^2} - p\right)}$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{s^2}{n^2} - p\right)} \pm \frac{s}{n}$$

*) Aus s, d, und a läßt sich n finden.

Man suche aus obigen Formeln zwey solche heraus, in denen u weg ist: dergleichen sind:

$$u = \frac{2s - na}{n}$$

$$u = a + (n - 1)d$$

folgl. $\frac{2s - na}{n} = a + nd - d$. Nun sucht man n.

$$2s - na = na + n^2d - nd$$

$$2s = 2na + n^2d - nd$$

$$n^2d + 2na - nd = 2s$$

$$n^2d + (2a - d)n = 2s.$$

 mit

mit d dividirt

$$n^2+\frac{(2a-d)n}{d}=\frac{2s}{d}$$ Unreine Quadr. Gleichung.

$$n^2+\frac{(2a-d)n}{d}+\frac{(2a-d)^2}{4d^2}=\frac{2s}{d}+\frac{(2a-d)^2}{4d^2}$$

$$n+\frac{(2a-d)n}{2d}=\sqrt{\left[\frac{2s}{d}+\frac{(2a-d)^2}{4d^2}\right]}$$

$$n=\sqrt{\left[\frac{2s}{d}+\frac{(2a-d)^2}{4d^2}\right]}-\frac{(2a-d)}{2d}$$

Oder kürzer: man substituirt $\frac{(2a-d)}{d}=m$

$$n^2+mn=\frac{2s}{d}$$

$$n^2+mn+\tfrac{1}{4}m^2=\frac{2s}{d}+\tfrac{1}{4}m^2$$

$$n+\tfrac{1}{2}m=\sqrt{\left(\frac{2s}{d}+\tfrac{1}{4}m^2\right)}$$

$$n=\sqrt{\left(\frac{2s}{d}+\tfrac{1}{4}m^2\right)}-\tfrac{1}{2}m.$$

---

§. 55.

Arithmetische Progressionen.

Aufgaben.

*) Bey Ausgrabung eines Brunnens wird der erste Fuß zu 4 Batzen, und jeder folgende wird zu 3 Batzen mehr, als der vorhergehende bedungen,

gen, und die Tieffe ist 20 Fuß worden; man soll angeben, was der Arbeitslohn betrage.

Hier sucht man die Summe einer arithmetischen Progression, deren erstes Glied $a = 4$, Differenz $d = 3$, und Zahl der Glieder $n = 20$. Und die Formul gibt die Auflösung. Nun ist $s = (a + u) \frac{1}{2} n$; hier fehlt aber u. Nun ist $u = a + (n - 1) d =$ $= 4 + 57 = 61$.

folglich $s = (4 + 61)\ 10 = 650$ Batzen, oder 43. fl. 20. kr.

*) Ein Bote wird auf 200 Meilen verschickt, und ihm für die erste Meile 20 kr. für die zweyte 23, für die dritte 26 kr. und so fort in dieser Verhältniß versprochen; was wird er zu fordern haben?

$n = 200.\ a = 20.\ d = 3.$ man sucht S.

$S = (a + u) \frac{1}{2} n.$ Man muß also vorher u suchen.

$u = a + (n - 1) d$

$= 20 + 199 . 3.$

$= 20 + 597 = 617$

$S = (20 + 617)\ 100 = 63700$ kr. oder 1061 fl. 40 kr.

*) In 7 Dörfern werden Soldaten eingelegt, und zwar jederzeit in das folgende 5 Mann mehr. Wenn nun im lezteren 55 Mann liegen, so fragt sich, wie viel es Soldaten überhaupt, und wie viel im ersten Dorf seyen?

$a = u - (n - 1) d$

$55 - 6 . 5 = 55 - 30 = 25 =$ erstes Dorf.

$S = (a + u) \frac{1}{2} n = (25 + 55) 3\frac{1}{2} = 280$ Soldaten.

*) Es soll einer 100 Eyer lesen, davon das erste vom Korb 2 Schritte und auch jedes vom anderen 2 Schritte entfernt ligt. Wie viele Schritte hat er zu thun?

Hier ist, wegen dem Hin- und Hergehen $a = 4,\ u = 400.$

$$S = (a + u)\tfrac{1}{2}n$$
$$= (4 + 400)\ 50$$
$$= 404 \cdot 50$$
$$= 20200 \text{ Schritte.}$$

*) Man solle die Glockenschläge von 1 bis 12 zusammenrechnen.

$a = 1.\ u = 12.\ d = 1.\ n = 12$

$$S = \frac{(a + u)n}{2} = (1 + 12)6 = 13.6 = 78 \text{ Schläge.}$$

*) Es ist ein Brunnen auf 12 Fuß Tiefe mit einem Arbeiter auf 19 fl. verdungen; allein nachdem dieser nur 8 Fuß tief gekommen, so wird der Accord von einem andern übernommen und die übrige 4 Fuß zu Stande gebracht. Es fragt sich, wie die 19 fl. oder 285 Batzen zu vertheilen seyen?

Hier ist $S = 285$ $n = 12.$ Allein man muß entweder noch a, oder noch d geben. Nimmt man an, daß der 2te Fuß 2mal, der 3te 3mal so viele Arbeit erfordere als der erste, so hat man $a = d$, und kann aus der Gleichung $s = \frac{1}{2}an\ (n + 1)$ das $a = d$ finden.

Nemlich $a = \frac{2s}{n(n+1)} = \frac{570}{12.13} = 3\frac{102}{156}$ Batzen.

Nun

Nun setze man n = 8, so wird

$s = \frac{1}{2}an(n+1) = 131\frac{7}{13}$ Batzen; so viel erhält A.

und $153\frac{6}{13}$ . . . . B.

—:· 285. Batzen.

*) Es hat jemand 14 Stücke silberne Schalen; die erste wiegt 59 Loth, die andere 55, und sofort ist jede folgende um 4 Loth leichter. Was ist das sammtliche Gewicht?

Aufl. 1.) Man suche das erste Glied

$59 = u$

$u = dn - d + a$

$a = u + d - dn$

$= 59 + 4 - 14 \cdot 4 = 7.$

2.) $\frac{a+u}{2} = m$

$= \frac{7+59}{2} = \frac{66}{2} = 33.$

3.) $mn = s$

$= 33 \cdot 14 = 462 =$ Summe der ganzen Progression.

Probe.

Die Progression und ihre Summe ist:

$59 + 55 + 51 + 47 + 43 + 39 + 35 + 31 +$
$+ 27 + 23 + 19 + 15 + 11 + 7 = 462.$

*) Man soll die Zahl 48 also in 9 Theile theilen, daß immer ein Theil $\frac{1}{2}$ grösser, als der nächstvorhergehende sey.

$x. \; x + \frac{1}{2}. \; x + 1. \; x + 1\frac{1}{2}. \; x + 2. \; x + 2\frac{1}{2}. \; x + 3.$
$x + 3\frac{1}{2}. \; x + 4.$

 s =

$$s = \frac{(a+u)n}{2} = \frac{(x+x+4)9}{2} = \frac{(2x+4)9}{2} =$$

$$= (x+2)9 = 9x + 18$$

$$9x + 18 = 48$$

$$x = \frac{48-18}{9} = \frac{30}{9} = 3\tfrac{1}{3} = \text{erstes Glied.}$$

Folgl. sind die Theile

$$3\tfrac{1}{2} + 3\tfrac{5}{6} + 4\tfrac{2}{6} + 4\tfrac{5}{6} + 5\tfrac{2}{6} + 5\tfrac{5}{6} + 6\tfrac{2}{6} +$$
$$+ 6\tfrac{5}{6} + 7\tfrac{2}{6} = 48.$$

Schmidt Rechenk. II. 475.

*) Es ist jemand 513 fl. schuldig, und will diese Schuld in 11 Jahren dergestalt abtragen, daß er jedes Jahr 3 fl. mehr, als das vorhergehende Jahr bezahlt; wie viel gibt er auf den ersten Termin?

das erste Glied = x
lezte . . . . = x + 30

$$s = \frac{(x+x+30)11}{2} = \frac{(2x+30)11}{2} =$$

$$= (x+15)11 = 11x + 165$$

$$11x + 165 = 513$$

$$11x = 513 - 165$$

$$11x = 348$$

$$x = \frac{348}{11} = 31\tfrac{7}{11}\ \text{fl.}$$

Schmidt Rechenk. II. 476.

*) Ein Kaufmann gewinnt mit einer gewissen Summe ein jedes Jahr so viel, als er angelegt hat. Nach 9 Jahren hat er mit dem Angelegten 2000 fl. wie viel hat er angelegt?

das

das erste Glied $= x$
das lezte $= 9x$

$$\text{Summe} = \frac{(x+9x)9}{2} = \frac{10x.9}{2} = 5x.9 = 45x = 2000$$

$$x = \frac{2000}{45} = 44\tfrac{4}{9}\text{ fl.}$$

Schmidt l. c.

Das fünfte Kapitel.

Von den Geometrischen Progressionen.

§. 56.

Geometrische Progressionen sind nichts anders, als fortgesezte stetige geometrische Proportionen. Proportiones Geometricæ continuæ continuatæ.

Z. B. $a : b = b : \frac{bb}{a}$ = viertes Glied.

$$b : \frac{bb}{a} = \frac{bb}{a} : \frac{bb.bb}{b.a.a} = \frac{bbb}{aa} = \text{5tes Glied.}$$

$$\frac{bb}{a} : \frac{bbb}{aa} = \frac{bbb}{aa} : \frac{\frac{bbb.bbb}{aa.aa}}{\frac{bb}{a}} = \frac{bbbb}{aaa} = \text{6tes Glied.}$$

u. s. w.

Die

Die Reihe ist also:

$$a.\ b.\ \frac{b^2}{a}.\ \frac{b^3}{a^2}.\ \frac{b^4}{a^3}.\ \frac{b^5}{a^4}.\ \frac{b^6}{a^5}\ \text{rc.}$$

$$\text{oder } a.\ b.\ \frac{b^m}{a^{m-1}}.\ \frac{b^{m+1}}{a^{m-2}}.\ \frac{b^{m+2}}{a^{m-3}}\ \text{rc.}$$

Oder, nach der allgemeinen Formul, da das folgende Glied einer wachsenden geometrischen Progression entsteht, wenn man das vorhergehende noch einmal mit dem Exponenten multiplicirt:

$$a.\ aq.\ aq^2.\ aq^3.\ aq^4.\ aq^5.\ aq^6.\ \text{rc.}$$

§. 57.

Aus der lezteren Formul folgen nun die Eigenschaften der geometrischen Progressionen in folgenden Sätzen:

1.) Der Exponent eines Gliedes ist jedesmal um 1 weniger, als die Zahl des Gliedes. Z. B. aq^4 ist das 5te Glied, und hat zum Exponent 4.

2.) Folglich ist jederzeit das lezte Glied $= aq^{n-1}$ (wo n die Anzahl der sämmtlichen Glieder bedeutet.)

Oder, das lezte Glied entstehet, wenn man das erste Glied mit dem Exponenten multiplicirt, dessen Dignität um 1 weniger ist, als die Progression Glieder hat.

Z. B. 3.) 3. 9. 27. 81. 243. 729. rc.

$$729 = 3 \cdot 3^{6-1} = 3 \cdot 3^5 = 3 \cdot 243 = 729.$$

3.) In einer geometrischen Progression ist das Produkt der beyden äussersten Glieder dem Produkt

zweyer

zweyer anderen Glieder gleich, die von den äusserſten gleichweit abſtehen.

$a.\ aq.\ aq^2.\ aq^3.\ aq^4.\ aq^5.$

$a.\ aq^5 = aq.\ aq^4 = aq^2.\ aq^3$ überall kommt a^2q^5.

Iſt aber die Zahl der Glieder ungleich, ſo iſt das Quadrat des mittleren Gliedes jenen Produkten gleich.

$a.\ aq.\ aq^2.\ aq^3.\ aq^4$

$a.\ aq^4 = aq.\ aq^3 = (aq^2)^2$ überall kommt a^2q^4.

2. 6. 18. 54. 162.

2. 162. = 6. 54 = 18^2 = 324.

§. 58.

4. Man verſuche, was herauskommt, wenn man das Erſte Glied vom lezten ſubtrahirt, und die Differenz durch den Exponenten weniger 1. dividirt.

$$\frac{aq^5 - a}{q - 1}$$

$q - 1$ in $aq^5 - a$ ($aq^4 + aq^3 + aq^2 + aq + a$

$$\begin{array}{l} aq^5 - aq^4 \\ \hline +aq^4 - a \\ aq^4 - aq^3 \\ \hline aq^3 - a \\ aq^3 - aq^2 \\ \hline aq^2 - a \\ aq^2 - aq \\ \hline aq - a \\ aq - a \\ \hline 0 \end{array}$$

Bei

Betrachtet man diesen Quotienten, so findet man, daß er die Summe aller Glieder in sich enthalte, weniger das lezte.

Man findet also die Summe der ganzen geometrischen Progression, wenn man die Differenz des ersten und lezten Gliedes durch den um 1. verminderten Exponenten dividirt, und zum Quotienten das lezte Glied addiret.

$$\frac{\text{Leztes Glied} - \text{Erstes Glied}}{\text{Exponent} - 1} + \text{Leztes Glied} = \text{Sume.}$$

Z. B. 3) 2. 6. 18. 54. 162.

$$\frac{162 - 2}{3 - 1} + 162 = 242 = 2 + 6 + 18 + 54 + 162.$$

Man nenne, wie auch künftighin

das erste Glied $= a$
leztes Glied $= \omega$
Zahl der Glieder $= n$
Exponenten $= q$
Summe $= s$

so ist $\frac{\omega - a}{q - 1} + \omega = s$

oder $\frac{\omega - a + \omega q - \omega}{q - 1} = s$

$\frac{\omega q - a}{q - 1} = s$. Bequemere Formul für die Summe.

$$\frac{162 . 3 - 2}{3 - 1} = \frac{486 - 2}{2} = \frac{484}{2} = 242 = s.$$

§. 59.

Man kann auch die Summe einer geometrischen Progression also finden: Bey gleichen Verhältnissen ver-

verhält sich die Summa antecedentium zur Summæ consequentium, wie jedes Antecedens zu seinem Consequens.

Z. B. Wenn $a : aq = b : bq = c : cq = d : dq$
so ist $a + b + c + d : aq + bq + cq + dq = b : bq$
dann $aq + bq + cq + dq = (a + b + c + d)\,q$
folgl. $a + b + c + d : aq + bc + cq + dq = b : bq$.

Nun ist in jeder geometrischen Progression jedes Glied das Antecedens Rationis, ausgenommen das lezte, und jedes Glied ist auch das Consequens Rationis, ausgenommen das erste.

Folglich ist die Summe aller antecedentium rationis $= s - \omega$ und die Summe aller Consequentium $= s - a$
folgl. $s - \omega : s - a = a : aq$

$saq - \omega aq = sa - a^2$, oder, mit a dividirt
$sq - \omega q = s - a$
$sq - s = \omega q - a$
$s = \frac{\omega q - a}{q - 1}$ wie oben, oder $\frac{\omega - a}{q} + \omega$.

Man kann demnach, wenn a, q, n gegeben sind, s finden.

D. i. Aus dem ersten Glied, dem Exponenten, und der Zahl der Glieder, kann man die Summe finden.

Nemlich, wenn a, q, n gegeben ist, so ist auch ω gegeben $= aq^{n-1}$ folgl.
$s - \omega$ oder
$s - aq^{n-1} : s - a = a : aq$

saq

$saq - a^2q^{2n-1} = sa - a^2$ mit a dividirt

$sq - aq^{2n-1} = s - a$

$sq - aq^n = s - a$

$sq - s = aq^n - a$

$s = \frac{aq^n - a}{q - 1}$. Neue Formul für die Summe.

§. 60.

Aus a, ω, n kann man q finden.

oder aus dem Ersten und Lezten Glied und der Zahl der Glieder den Exponenten.

$\omega = aq^{n-1}$

$\frac{\omega}{a} = q^{n-1}$

$\sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}} = q$. Formul für den Exponenten.

Z. B. $a = 3$. $\omega = 768$. $n = 5$.

so ist $\sqrt[5-1]{\frac{768}{3}} = \sqrt[4]{256} = \sqrt[2]{16} = 4 = q$.

§. 61.

Aus q, n, s kann man a finden.

oder aus dem Exponenten, der Zahl der Glieder und der Summe das Erste Glied.

$s = \frac{aq^n - a}{q - 1}$

$sq - s = aq^n - a$

$\frac{sq - s}{q^n - 1} = a$. Formul für das Erste Glied.

Z. B.

Z. B. $q=4$, $n=5$, $s=1023$, so ist

$$\frac{023.4-1023}{4^5-1}=\frac{4092-1023}{1024-1}=\frac{3069}{1023}=3=a.$$

dann $3.12.48.192.768=1023$.

§. 62.

Aus a, ω, q, kann man n finden.

D. i. Aus dem ersten und lezten Glied und dem Exponenten, die Zahl der Glieder.

$$\omega=aq^{n-1}$$
$$aq^{n-1}=\omega$$
$$q^{n-1}=\frac{\omega}{a}$$

Nun sey $a=3$, $\omega=768$, $q=4$

so ist $4^{n-1}=\frac{768}{3}=256$.

Nun dividire man 4 so oft man kann in 256.

4 in 256
4 in 64 einmal.
4 in 16 zweytesmal.
4 in 4 drittesmal.
1 viertesmal.

Man konnte also 4mal dividiren

folgl. $4=n-1$
$4+1=n$
$5=n$.

oder $\omega = aq^{n-1}$

$\frac{\omega}{a} = q^{n-1}$ mit q multipl.

$\frac{\omega q}{a} = q^n$

$\frac{3072}{3} = q^n = 4^n$

$1024 = 4^n$.

Man dividire, so oft man kann

4 in 1024
4 in 256 einmal.
4 in 64 zweytesmal.
4 in 16 drittesmal.
4 viertesmal. $= 4^x = n$.

oder, wenn $a = 5$. $q = 3$. $\omega = 3645$.

$\frac{3645 \cdot 3}{5} = \frac{10935}{5} = 2187 = q^n$

Nun erhebe man q so hoch, bis 2187 kommt.

3
3
$9 = q^2$
$27 = q^3$
$81 = q^4$
$243 = q^5$
$729 = q^6$
$2187 = q^7$.

Man

Man findet also, daß n, oder die Zahl der Glieder 7 sey, und die Progression ist also folgende:

5. 15. 45. 135. 405. 1215. 3645.

§. 63.

Ferner, aus a, q und s kann man n finden. oder aus dem Ersten Glied, dem Exponenten und der Summe, die Zahl der Glieder.

$$\frac{aq^n - a}{q - 1} = s$$

$$aq^n - a = qs - s$$

$$aq^n = qs - s + a$$

$$q^n = \frac{qs - s + a}{a}$$

wenn $a = 3.\ q = 4.\ s = 1023.$ so ist

$$4^n = \frac{4092 - 1023 + 3}{3} = \frac{3069 + 3}{3} = \frac{3072}{3} = 1024.$$

Man dividire so oft man kann:

4 in 1024
4 in 256 = (1.)
4 in 64 = (2.)
4 in 16 = (3.)
4 in 4 = (4.)
1 = (5.) folglich $n = 5$.

oder $4 = 4^1$
$16 = 4^2$
$64 = 4^3$
$256 = 4^4$
$1024 = 4^5$

§. 64.

Ferner, aus a, n, s kann man q finden.

D. i. Aus dem Ersten Glied, der Zahl der Glieder, und der Summe den Exponenten.

$$\frac{aq^n - a}{q - 1} = s$$

$$aq^n - a = qs - s$$

$$aq^n = qs - s + a$$

$$aq^n - qs = -s + a$$

wenn wieder $a = 3$, $n = 5$, $s = 1023$

so ist $3q^5 - 1023q = 3 - 1023$ mit 3 dividirt:

q in $q^5 - 341q = 1 - 341 = -340$ (1mal)

q in $q^4 - 341 = -\frac{340}{4} = -85$

oder $341 - 85 = 256$ (2mal)

q in $q^3 = \frac{256}{4} = 64$ (3mal)

q in $q^2 = \frac{64}{4} = 16$ (4mal.)

$$q^1 = \frac{16}{4} = 4.$$

also ist $q = 4$.

§. 65.

Ferner, aus q, n, s, kann man einzelne Glieder der geometrischen Progression finden.

$$s = \frac{aq^n - a}{q - 1}$$

$$a = \frac{sq - s}{q^n - 1}.$$

Wenn

Wenn man nun diese Formel durch die Potenzen des immer wachsenden Quotienten multiplicirt, so kommen alle übrige Glieder.

Neml. $\dfrac{sq^2 - q}{q^n - 1}$

$$\frac{sq^3 - q^2}{q^n - 1}$$

$$\frac{sq^4 - q^3}{q^n - 1}$$

$$\frac{sq^5 - q^4}{q^n - 1} \text{ 2c.}$$

Oder, weil man eine Division auch also multipliciren kann, wenn man, statt den Dividend zu multipliciren, den Divisor dividirt:

$$s\frac{q - 1}{q^{n-1} - \frac{1}{q}}$$

Nemlich $\dfrac{q^n - 1}{q} = \dfrac{q^n - 1}{q^1} = q^{n-1} - \dfrac{1}{q}$

$$s\frac{q - 1}{q^{n-2} - \frac{1}{q^2}}$$

$$s\frac{q - 1}{q^{n-3} - \frac{1}{q^3}}$$

$$s\frac{q - 1}{q^{n-4} - \frac{1}{q^4}} \text{ 2c.}$$

§. 66.

In einer jeden geometrischen Progression verhält sich das Erste Glied zum Dritten, wie das Quadrat des ersten zum Quadrat des zweyten; das erste Glied

zum vierten, wie der Cubus des ersten zum Cubus des zweyten.

Ueberhaupt:

Zwey Glieder, die unter sich einen gewissen Abstand haben, verhalten sich wie zwey neben einander stehende Glieder, deren Exponent die Stelle anzeigt, um welche jenes eine Glied vom anderen absteheet.

Z. B. Das 6te Glied verhält sich zum 9ten, wie die 6te Potenz eines jeden beliebigen Gliedes zur 6ten Potenz des unmittelbar folgenden.

Beweis.

Wenn $a. aq. aq^2. aq^3. aq^4. aq^5. aq^6. aq^7. aq^8.$ so ist
$a : aq^2 = a^2 : a^2q^2$ der Expon. ist beyderseits q^2
$a : aq^3 = a^3 : a^3q^3$ der Expon. ist beyderseits q^3

Da das 9te Glied um 6 Stellen vom 3ten Glied stehet, so ist

$aq^2 : aq^8 = \overline{aq^5}^{\,6} : \overline{aq^6}^{\,6}$ oder
$aq^2 : aq^8 = a^6 q^{5 \cdot 6} : a^6 q^{6 \cdot 6}$ der Exponent ist beyderseits q^6.

Ueberhaupt

Wenn aq^m und aq^r der Ausdruck 2er Glieder ist, deren Verhältnis man begehrt, und ihre Entfernung von einander ist $= r - m$; ein jedes andere Glied sey aq^n und das unmittelbar folgende $= aq^{n+1}$ so ist jederzeit
$aq^m : aq^r = a^{r-m} q^{nr-nm} : a^{r-m} q^{(n+1)(r-m)}$
der Exponent ist beyderseits q^{r-m}

§. 67.

Hieraus läßt sich die Aufgabe leicht auflösen, zwischen 2 gegebenen Stellen mehrere mittlere geometrische Proportionalstellen zu finden.

Man

Man solle zwischen a und b eine mittlere Proportionalstelle finden.

$$a : x = x : b$$
$$ab = x^2$$
$$\sqrt{ab} = x.$$

Man soll zwischen a und b zwey mittlere geometrische Proportionalgrössen finden.

a. x. y. b.

Nach obigem Gesez ist

$$a : b = a^3 : x^3$$
$$ax^3 = a^3 b$$
$$x^3 = a^2 b$$
$$x = \sqrt[3]{a^2 b}$$

Da man nun das erste und zweyte Glied hat, so ist das dritte leicht zu finden: Nemlich

$a : \sqrt[3]{a^2 b} = y : b$ oder alles auf die Potenz 3 gebracht:

$$a^3 : a^2 b = y^3 : b^3$$
$$\frac{a^3 b^3}{a^2 b} = y^3$$
$$ab^2 = y^3$$
$$\sqrt[3]{ab^2} = y$$

Folgl. erhält man die Progression:

$$a. \sqrt[3]{a^2 b}. \sqrt[3]{ab^2}. b$$

§. 68.

Ueberhaupt wenn zwischen a und b eine Anzahl mittlerer Glieder n gefunden werden solle, so ist die Stelle, um welche b von a abstehet, $= n + 1$. Folglich

$$a^{n+1} : x^{n+1} = a : b$$

$$\frac{a^{n+1} b}{a} = x^{n+1}$$

$$a^n b = x^{n+1}$$

$$\sqrt[n+1]{a^n b} = x$$

oder auch $= a^{\frac{1}{n+1}} b^{\frac{1}{n+1}}$

Und so hat man demnach das erste Glied von den gesuchten Mittleren gefunden. Gebrauchet man diese nemliche Rechnung auch bey den übrigen Stellen, so findet sich

die andere Stelle $= \sqrt[n+1]{(a^{n-1} b^2)}$

die dritte $= \sqrt[n+1]{(a^{n-2} b^3)}$

die vierte $= \sqrt[n+1]{(a^{n-3} b^4)}$

Und so fort, bis der Exponent der Grösse b der Grösse $n + 1$ gleich wird; in welchem Falle $a = o$ und das Glied $\sqrt[n+1]{(a^o b^{n+1})}$ sich in b verwandelt.

§. 69.

Die Summe einer abnehmenden geometrischen Progression zu finden.

Bisher hatte man wachsende Progressionen; allein es gibt auch abnehmende. In diesem Fall wird der Exponent ein Bruch, und es kommt eine negative Grösse, man mag entweder das erste Glied, als das Grössere, vom lezten Glied, als dem Kleineren, abziehen, oder 1 von dem Exponenten, der ein Bruch ist.

Man

Man kann sichs erleichtern, wenn man bey der abnehmenden Progression das lezte Glied als das erste ansiehet.

Statt $s = \frac{aq^n - a}{q - 1}$ kommt nun

$$s = \frac{a - aq^n}{1 - q} \text{ oder } \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Nun soll man eine Reihe von Brüchen addiren, die mit $\frac{1}{2}$ anfangt, und da der folgende Bruch immer des vorhergehenden Hälfte ist.

Z. B. $\frac{1}{2}. \frac{1}{4}. \frac{1}{8}. \frac{1}{16}. \frac{1}{32}. \frac{1}{64}. \frac{1}{128}. \frac{1}{256}.$

Nach obigem Ausdruck ist hier $a = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, folglich

$$\frac{a(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{\frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{2})^n)}{\frac{1}{2}} = 1 - (\tfrac{1}{2})^n$$

$$= 1 - \frac{n}{2}$$

oder n Glieder der Progression geben eine Summe, deren zu 1 das nte Glied fehlt; z. B. oben sind 8 Glieder, folglich das 8te $= \frac{1}{2^8}$. Addiret man nun diese Glieder nach der gewöhnlichen Bruchrechnung, so daß man sie alle auf 256 Theile bringt, so muß man jeden Bruches Zähler mit der Zahl multipliciren, mit der sein Nenner muß multiplicirt werden, um sich in 256 zu verwandlen. Also beträgt dergleichen 256 Theile.

$\frac{1}{256}$	1.	oder die Brüche zusammen =
$\frac{1}{128}$	2.	$\frac{255}{256} = 1 - \frac{1}{256}$.
$\frac{1}{64}$	4.	
$\frac{1}{32}$	8.	
$\frac{1}{16}$ . . .	16.	
$\frac{1}{8}$ . . .	32.	
$\frac{1}{4}$ . . .	64.	
$\frac{1}{2}$ . . .	128.	
	255.	

Nun kann $\frac{1}{2}$n so klein werden, als man will, und folglich kann sich die Summe dieser Reihe, nemlich $1 - \frac{1}{2}$n, der Einheit, so weit man will, nähern; oder, man kann die Reihe allemal so weit fortsetzen, daß ihre Summe zwar nicht völlig 1, aber doch 1 so nahe ist, als man will.

Man sagt also, die Summe der Unendlichen Reihe sey = 1, oder, wenn man sich alle mögliche Glieder dieser Reihe vorstellt, so betragen sie zusammen = 1. Denn es kann doch immer näher kommen, als man durch einen vorgeblichen Terminum behaupten wollte. Es fehlt zwar immer noch zu 1 das lezte Glied; aber es kann solches so klein werden, als man nur immer will; und man sagt in diesem Verstande: es verschwindet; oder: das lezte Glied wird in Vergleichung mit der 1, als Nichts angesehen, und daher ist die Summe = 1.

§. 70.

Man soll die Summe einer unendlichen Reihe von Brüchen finden, welche in einer geometrischen Progression fortgehen, also, daß der Zähler = 1, der

Nen-

Nenner des ersten Bruchs $= a$, und der Exponent $= \frac{1}{m}$ gegeben werden. So ist $x =$ Summe.

Und die Progression:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{ma} + \frac{1}{m^2 a} + \frac{1}{m^3 a} + \frac{1}{m^4 a} \infty$$

Und, nach obigen Formuln

$$x = \frac{\text{Erstes Glied} - \text{Leztes}}{\text{Exponent} - 1} + \text{Erstes}$$

$$x = \frac{\frac{1}{a} - \text{Leztes}}{m - 1} + \frac{1}{a}$$

Da nun das lezte Glied in Ansehung des ersten unendlich klein ist, mithin als nichts zu rechnen, so ist

$$x = \frac{\frac{1}{a} - 0}{m - 1} + \frac{1}{a}$$

$$x = \frac{1}{a} : (m - 1) + \frac{1}{a} = \frac{1}{(m-1)a} + \frac{1}{a}$$

$$x = \frac{1}{(m-1)a} + \frac{m-1}{(m-1)a} = \frac{m}{(m-1)a}$$

Es sey $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \infty$
so ist $a = 2$, $m = 2$.

Mithin die unendliche Reihe

$$= \frac{2}{(2-1)2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Oder, es sey $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} \infty$
so ist $a = 3$, $m = 3$.

Mit-

Mithin die Series $= \frac{3}{(3-1)3} = \frac{1}{2}$.

Oder, wenn statt des Zählers 1 eine andere Grösse genommen wird, so sey der erste Bruch $= \frac{b}{a}$

der Exponent $= \frac{1}{m}$

die Summe $= x$

so ist $\frac{\frac{b}{a} - 0}{m-1} + \frac{b}{a} = x$

$$x = \frac{b}{(m-1)a} + \frac{b}{a} = \frac{b}{(m-1)a} + \frac{mb-b}{(m-1)a}$$

$$= \frac{mb}{(m-1)a}.$$

Es sey die Progression $\frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32}\ \infty$

so ist $b=3$. $a=4$. $\frac{1}{m} = \frac{1}{2}$. Mithin $m=2$.

folgl. die Reihe $= \frac{2 \cdot 3}{(2-1)4} = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$.

Geo-

Geometrische Progressionen.

§. 71.

Aufgaben.

Unerachtet man die bey geometrischen Progressionen vorkommende Aufgaben mit ungemein leichter Mühe durch die Logarithmen auflösen kann, wovon unten das nöthige vorkommen wird; so wollen wir doch gegenwärtig schon folgende vorläufige Regul anführen:

Wenn man die lezte Stelle einer geometrischen Progression bekommen will, so hat man nicht nöthig, auf eine mühsame Art bis dahin zu multipliciren, sondern nur bis auf einige Stellen, unter welche man von o an die Seriem numerorum naturalium schreibt:

1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.
o.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.

Addirt man II + IV = VI so stehet 64 über VI, dem Produkt 4. 16. Hieraus folgt die Regel:

Wenn die untere Zahl (in der arithmetischen Progression) welche zu einer bestimmten oberen gehört, (z. B. XIV gehört zur 15 Stelle, wie V zur 6ten und IX zur 10ten Stelle) aus etlichen hier vorhandenen unteren Zahlen zusammen gesezt wird, (z. B. V + IX, VI + VIII, VII + VII) und die correspondirende Zahlen in einander multiplicirt werden, das Produkt aber durch den ersten Terminus (der hier o ist,) dividirt wird, so kommt der verlangte Terminus.

Z. B.

Z. B. VIII = 256) mult.
64

1024
1536

mult. (16384. = XIV. oder 15ter Term.
16384. = XIV

268435456 = XIV + XIV = XXVIII
oder 29 Term.

mult. 8 = III

2147483648 = XXVIII + III = XXXI
oder 32 Term.

mult. 256 = VIII

549755813888 = XXXI + VIII = XXXIX
oder 40 Term.

ferner 217483648 = XXXI) mult.
217483648 = XXXI

4611686018427387904 = XXXI + XXXI = LXII
oder 63 Term.

mult. 2 = I

9223372036854775808 = LXII + I = LXIII oder
64 Term.

In der vorigen Progression war der Exponent = 2; bey einem anderen Exponenten kommt, wie begreiflich ist, eine andere obere Reihe, die untere aber bleibt unverändert.

*) Der Indianer Sessa forderte von dem Könige Shehram zur Belohnung für sein erfundenes Schachspiel so viel Waizen als die Summe ertragen würde, wenn man ihm für das erste Feld im Schachbrett 1 Körnlein, für das 2te 2, für das 3te 4 Körnlein, u. s. f. jedesmal für

für das folgende doppelt so viel als für das vorhergehende gäbe. Wenn nun das Schachbrett 64 Felder hat, so fragt sich, wie viel man ihm hätte geben müssen?

Man soll also s finden. $q = 2.$

$$s = \frac{\omega - a}{q - 1} + \omega$$

$$= \frac{9223372036854775808 - 1}{1} + 922337 \text{ etc.}$$

$$= 9223372036854775807$$
$$\underline{9223372036854775808}$$

19,446,744,073,709,551,615 = Summe der ganzen Progression, oder Anzahl der geforderten Körnlein.

*) Es werden 40 Städte also verkauft, daß für die erste 1, für die folgende 2, für die 3te 4, u. s. f. bezahlt werden sollen; was kosten sie zusammen?

Nach obiger Rechnung ist:

XXXI = 2147483648
VIII = 256 mult.

549755813888 für die 40ste Stadt.
und für alle zusammen kommt
1099511627775.

*) Es verkauft jemand ein Pferd unter der Bedingung, daß ihm für den ersten Hufnagel $\frac{1}{2}$ kr., für den andern noch einmal so viel, für den 3ten abermal das doppelte vom vorigen, u. s. f. gegeben werde; wenn nun das Pferd 32 Hufnägel hat, so fragt sich, was wird der Preis seyn?

A. 35791394 fl. $7\frac{1}{2}$ kr.

*) Wie

*) Wie zahlreich wird die Nachkommenschaft einer Hündin seyn in 10 Jahren, in der Voraussetzung, daß dieselbe 2 Hunde und 3 Hündinnen jährlich werffe, und diese jährlich so wie die Mutter sich auf eben die Art vermehren, und alle das Leben behalten?

Im 1 Jahr wirft die erste Hündin .... 5.
im 2ten Jahr werffen 3 von diesen
mit der ersten ... 4. 5 = 20
im 3ten Jahr werffen 12 von diesen, und 4 vom vor. Jahr ... 16. 5 = 80
im 4ten Jahr 48 von diesen, und
16 vom vor. Jahr ... 64. 5 = 320

Man erhält also folgende Progression:
5. 20. 80. 320. wo der Exponent = 4
und deren 10tes Glied = 1,310720 ist.

Um die Summe der ganzen Progression zu finden, ziehe man also das erste Glied 5 davon ab, kommt 1310715 dieses durch den Expon. — 1 = 3 divid. =

= 436905 hiezu das lezte Glied, nemlich
1310720 addirt, gibt

1747625 = Summe.

Das

Das sechste Kapitel.

Von den Logarithmen.

§. 72.

Man setze folgende Reihen unter einander:

A.	1	2	4	8	16	32	64	128
B.	a^0	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7
C.	0	1	2	3	4	5	6	7

So enthält die Reihe A lauter Potenzen der Zahl 2, demnach eine geometrische Progression. Die Reihe B enthält eine allgemeine Vorstellung; und die Reihe C die auf einander folgende Exponenten, demnach eine arithmetische Progression.

Jede Zahl der Reihe C zeigt an, aus wie viel Verhältnissen die Verhältniß der Zahl 1 zu der über ihr stehenden Zahl in A zusammengesezt sey. Z. B. die Zahl 3 in der untersten Reihe C sagt, daß 1 zu 8 als der darüber stehenden Zahl, 3 Verhältnisse erfordert habe, oder daß man 1 habe 3mal multipliciren müssen, um 8 zu erhalten.

Und nun heißt jede Zahl in C der **Logarithmus** der über ihr stehenden Zahl in A.

Es ist nicht eben unumgänglich nothwendig, daß man 0 zum Logarithmus von 1 annimmt; wenn aber einmal eine Reihe festgesezt ist, so heißt dieses ein **logarithmisches System**, und es wird sich bald zeigen, daß es vortheilhafter sey, 0 als den Logarithmen von 1 anzunehmen.

§. 73.

Man nehme nun obige Progressionen: zuerst die geometrische, und multiplicire 4 mit 16, kommt 64. Nun nehme man auch die arithmetische Progression und addire die Zahlen 2 und 4, welche unter den Zahlen 4 und 16 stehen, so erhält man 6 und diese gefundene Summe stehet unter dem Produkt 64. Wenn man demnach schon ausgerechnete Logarithmen für alle Zahlen hat, so kann man das Multipliciren der Zahlen selbst ersparen; denn man darf nur ihre Logarithmen zusammen addiren, und den gefundenen Logarithmen aufschlagen, so wird er allemal neben einer Zahl stehen, welche das Produkt der vorigen Zahlen ist, das sich demnach ohne Multiplication entdeckt. Und es kommt also nur darauf an, daß man die Logarithmen für alle Zahlen finde.

Ferner, die Logarithmen verwandlen das Dividiren der Zahlen, wenn man statt in diesen Zahlen zu rechnen, sich ihrer bedient, in blosses Subtrahiren. Z. B. Es soll 128 durch 4 dividirt werden; so sind nach dem vorigen System die Logarithmen dieser Zahlen 7 und 2. Wenn man nun 2 von 7 subtrahirt, so bleibt 5; 5 aber weiset auf 32, welches auch der wirkliche Quotient ist, wenn man 128 durch 4 dividirt.

Ferner, die Logarithmen verwandlen die vielfache Multiplication mit sich selbst, oder die Elevation einer Zahl auf eine gewisse Potenz in eine einfache leichte Multiplication mit dem Exponenten. Z. B. Man will den Cubus von 4 haben, so wird der Logarithmus von 4, welcher 2 ist, nur mit 3, als dem Exponenten des Cubus multiplicirt, so kommt 6; 6 aber ist der Logarithmus von 64, und 64 der Cubus von 4.

Fer-

Ferner, die Logarithmen, wenn man in ihnen rechnet, verwandlen die mühsame Extraktionen der Wurzeln in eine einfache leichte Division mit dem Exponenten. Z. B. Man fragt, was die Quadratwurzel aus 64 sey? Log. 64. ist nach obigem System 6, dieses 6 durch den Exponenten 2 dividirt, gibt 3; 3 aber ist der Logarithmus von 8 und 8 die gesuchte Quadratwurzel aus 64.

Dieses sind nicht nur wichtige Vortheile, wenn man in grossen Zahlen zu rechnen hat, sondern sie geben uns auch ganz neue Wege an die Hand, sehr verwickelte Gleichungen gleichsam spielend aufzulösen.

Z. B. $ca^x = db^x$ stehet logarithmisch also:

$$lc + xla = ld + xlb$$

$$xla - xlb = ld - lc$$

$$x = \frac{ld - lc}{la - lb}$$

davon s. unten mehrere Beyspiele.

§. 74.

Nun nehme man auch eine Reihe an, wo der Logarithmus von 1 nicht 0, sondern auch 1 ist.

Progr. Geom. oder Num. Naturales.	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.
Progr. Arith. oder Logar.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.

Auch hier gilt die Regul, daß die Logarithmen das Multipliciren in Addiren verwandlen; allein man muß von dem gefundenen Logarithmen vorher 1 abziehen.

Z. B. $4 \cdot 8 = 32.$

Log. 3 + Log. 4 = 7.

Aber erst 7 — 1 ist Log. von 32.

Bey der Division wird eben so blos subtrahirt; allein man muß zum gefundenen Logarithmen 1 addiren.

Z. B. $\frac{128}{4} = 32$

Log. 8 — Log. 3 = Log. 5.

Aber erst 5 + 1 = Log. von 32.

§. 75.

Die mit größtem Vortheil bey den Logarithmen angenommene Reihe ist:

$10^0\ 10^1\ 10^2\ 10^3\ 10^4\ 10^5\ 10^6$ &c.

oder wirklich ausgedrückt:

1 10 100 1000 10000 100000 ꝛc.

die Logarithmen sind die Exponenten; also

0 1 2 3 4 5 ꝛc.

d. i. 0 ist der Logarithmus von 1; 2 ist der Logarithmus von 100 ꝛc. Allein auf diese Weise bekommt man nur die in Ratione Decupla fortgehende ganze Zahlen, und ihre Logarithmen. Man müß aber auch die Logarithmen der Zwischenzahlen, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ferner von 11, 12, 13 bis 99 haben, so fort von 101 bis 999 ꝛc. Deswegen henkt man jedem Exponenten 7 weitere Decimalstellen, oder Nullen an, und die arithmetische Progression wird nun

0,0000000. 1,0000000. 2,0000000. 3,0000000ꝛc.

denn, da zwischen 0 und 1, zwischen 1 und 2 Brüche fallen müssen, so müssen auch die Logarithmen der Zwischenzahlen 2, 3, 4, 5. ꝛc. lauter Brüche werden, die als Decimalbrüche die Stellen jener angehenkten Nullen einnehmen.

§. 76.

§. 76.

Der Weg, sie zu finden, ist nun folgender:

1.) Die mittlere geometrische Proportionalgrösse zwischen 1 und 10 wird also gefunden:

$$1 : x = x : 10$$
$$x^2 = 10$$
$$x = \sqrt{10} = 3,162277.$$

2.) Die mittlere arithmetische Proportionalgrösse zwischen 0 und 1 wird also gefunden:

$$0 - x = x - 1$$
$$x + x = 0 + 1$$
$$2x = 1$$

$x = \frac{1}{2}$ oder in Decimalzahlen 0,5000000.

Also wäre von 3,162277 der Logarithmus 0,5000000. Und so müßte man bey der Berechnung nun fortfahren, und lauter mittlere geometrische und sodann auch wieder lauter mittlere arithmetische Proportionalzahlen suchen. Z. B. Zuerst zwischen 3,162277 und 10 die mittlere geometrische Proportionalzahl, und für ihren Logarithmen müßte man zwischen 0,5000000 und 1 die mittlere arithmetische Proportionalzahl suchen. Und also mußten auch die ersten Berechner dieses Canonis Logarithmorum ihre Arbeit fortsetzen, und kamen nach mühsamer 24maliger Extraktion der Wurzel auf die mittlere geometrische Proportionalzahl 9,000000. und ihren Logarithmen 0,954242; so war nun der Logarithmus von 9 bestimmt. Aber durch ähnliche Arbeiten mußte man auch die Logarithmen von 2, 5 und 7 suchen, und fand:

Log. 2 = 0,301030
Log. 5 = 0,698970
Log. 7 = 0,845098

Für die übrigen einfachen Zahlen ergaben sich die Logarithmen leichter; denn

#Log. 9 / 2 $\sqrt{9} = 3$, also Log. $\frac{9}{2}$ = Log. 3

Ferner $4 = 2^2$ also 2 Log. 2 = Log. 4

Ferner 2 . 3 = 6 also Log. 2 + Log. 3 = Log. 6

Endlich 2 . 4 = 8 also Log. 2 + Log. 4 = Log. 8.

So hätte man also alle einfache Zahlen; hingegen für 11, 13 ꝛc. mußte man abermal mühsam suchen, da es sich für 12, 14. und überhaupt für solche Zahlen, die sich in ganze Faktoren zerfällen lassen, schon leichter ergab.

§. 77.

Die Logarithmen bestehen also aus Decimalbrüchen, und zwar von 1 bis 10 ohne vorhergehendes Ganzes; von 10 bis 100 stehet die Zahl 1 vor dem Bruch, von 100 bis 1000 die Zahl 2 ꝛc. überhaupt ist die vorstehende Zahl des Logarithmen allemal um 1 weniger, als die Zahl Ziffern hat, deren er zugehört. Z. B. 713 hat bey seinem Logarithmen 2 voranstehen, 9890 hat 3 u. s. w. Diese vor den Decimalstellen gesezte ganze Zahl heißt *Characteristica*, Kennziffer, und gibt zu erkennen, wie viele Ziffern die zugehörige Zahl habe, d. i. ob sie zwischen 1 und 10, zwischen 10 und 100, zwischen 100 und 1000 ꝛc. hineinfalle.

Es folgt auch, daß die Logarithmen von 2, 20, 200, 2000 ꝛc. in den Decimalziffern einerley seyn müssen, nur in der Charakteristik sind sie verschieden, z. B. Log. 2 = 0,3010300, Log. 20 = 1,3010300, Log. 200 = 2,3010300. ꝛc. Eben so auch bey andern Zahlen. Z. B. 463, 4630, 46300, 463000. ꝛc.

§. 78.

Die Logarithmen der eigentlichen Brüche erhält man, wenn man den Logarithmen des Zählers vom Logarithmen des Nenners abziehet, und dem herauskommenden Logarithmen das Zeichen — vorsezt.

Z. B. man sucht den Logarithmen von $\frac{3}{4}$

$$\begin{aligned} \text{Log. } 4 &= 0{,}6020600 \\ \text{Log. } 3 &= 0{,}4771212 \\ \hline \text{Log. } \tfrac{3}{4} &= -0{,}1249388 \end{aligned}$$

Ganze mit Brüchen verbundene Zahlen werden in uneigentliche Brüche verwandelt, und hier der Logarithmus des Nenners vom Logarithmen des Zählers abgezogen, und kein Zeichen vorausgesezt, denn der Rest ist ohnehin positiv.

Z. B. man sucht den Logarithmen für $3\frac{3}{4} = \frac{15}{4}$

$$\begin{aligned} \text{Log. } 15 &= 1{,}1760913 \\ \text{Log. } 4 &= 0{,}6020600 \\ \hline \text{Log. } \tfrac{15}{4} &= 0{,}5740313 \end{aligned}$$

Anmerk. Wenn man in Decimalbrüchen rechnet, so hat man diese Weitläuftigkeit nicht nöthig, sondern man kann den Logarithmen unmittelbar in den Tabellen finden. Z. B. Im gegenwärtigen Falle hätte man den Decimalbruch $3\frac{75}{100}$ oder 3,75. Nun ist für die Zahl 375 der Logarithmus, den man vorhin gefunden hatte, auch sein Logarithmus. Allein, weil die Zahl aus 3 Ziffern bestunde, so mußte die Charakteristik 2 vorangehen; und hier, wo nur die einzige Zahl 3 vorhanden ist, muß die Charakteristik 0 vorangehen. Es haben demnach vermischte Zahlen, die Decimalstellen an sich hängen ha-

ben, den nemlicheu Logarithmen, als ob die angehängten Ziffern ebenfalls zur ganzen Zahl gehörten, und nur die Charakteristik ändert sich nach den angezeigten Gesezen.

§. 79.

Nun sind noch folgende Aufgaben unentbehrlich, die LogarithmenTabellen gehörig zu gebrauchen.

1. Aufgabe.

Man soll eine Zahl und ihren angehängten Decimalbruch finden, von der der Logarithmus nicht in den Tabellen genau vorkommt, wohl aber ihre Charakteristik.

Es sey der Logarithmus 1,0301935 so erhellet aus der Charakteristik, daß seine Zahl zwischen 10 und 100 fället, und aus den Tafeln ists noch deutlicher, daß sie zwischen 10 und 11 sey. Man nehme also inzwischen 10 an, und vermehre die Charakteristik um 1, oder suche 2,0301935; so fällt dieser Logarithmus zwischen 107 und 108, oder die Zahl ergibt sich = 10,7. Nun vermehre man die Charakteristik nochmals um 1, so fällt der Logarithmus 3,0301935 zwischen 1072 und 1073; Und eine so weit gehende Bestimmung ist meistens zulänglich, wenn man nemlich die Zahl 10,72 oder $10\frac{72}{100}$ annimmt.

2. Aufgabe.

Man soll den Logarithmen einer grossen Zahl finden, welche in den Tafeln nicht mehr vorkommt.

Auf-

Auflösung.

Wenn sich die grosse Zahl, die demnach in den Tafeln nicht vorkommt, in Faktoren zerfällen lässet, so kann der Logarithmus derselben gar leicht durch Addition gefunden werden, wenn nemlich nur noch die Faktoren der Zahl in den Tafeln vorkommen.

Z. B. Man verlangt
den Log. von 11345. 11345 = 2269. 5.
Log. 2269 + Log. 5 = Log. 11345
Log. 2269 = 3,3558345
Log. 5 = 0,6989700
Log. 11345 = 4,0548045.

Allein nicht immer kann man eine Zahl also zerfällen, man hat demnach auch folgende Auflösung:

1.) Man suchet in den Tabellen den Logarithmen zu den 4 ersten Ziffern; z. B. wenn es die Zahl 52128 wäre, so sucht man den Logarithmen zu 5212.

2.) Man subtrahirt den gefundenen Logarithmen von dem zunächst darauf folgenden grösseren, und multiplicirt die Differenz mit den Zahlen, welche vorhin abgeschnitten worden, also mit 8.

3.) Man schneidet von dem Produkt so viele Ziffern rechter Hand ab, als in der ersten Operation zurückgeblieben, und addiret den Rest zum ersten gefundenen Logarithmen.

4.) Endlich vermehrt man die Charakteristik um so viele Einheiten, als die Anzahl der restirenden Ziffer beträgt.

Log. 5213 = 3,7170877
Log. 5212 = 3,7170044

833 = Differenz.
8 = abgeschnittene Zahl.

6664

hievon die Zahl 4 abgeschnitten, bleibt 666 dieses zum Log. 5212 addirt, kommt, wenn man noch die Charakteristik 3 um 1 vermehrt, 4,7170710, als der Logarithmus von 52128.

*) Was ist der Logarithmus von 521284?

Log. 5213 = 3,7170877
Log. 5212 = 3,7170044

833 = Differenz.
84 = restirende Zahlen.

3332
6664

699|72 wird abgeschnitten.

Charakt. 7170044

3 + 2 = 5. 5,7170743 = Logar. von 521284.

3te Aufgabe.

Die Zahl zu einem Logarithmen zu finden, die aus 5, 6, 7 ꝛc. Ziffern bestehet, und also in den gewöhnlichen Tafeln nicht mehr vorkommt.

Auflösung.

1.) Man suche in den Tafeln unter der höchsten vorkommenden Charakteristik 3 einen Logarithmen, der dem gegebenen Logarithmen von der linken zur rechten Hand am nächsten kommt. Die darneben stehende Zahl gibt schon die 4 ersten

ersten Ziffern für den Werth des gegebenen Logarithmen.

2.) Man subtrahire den gefundenen niedrigen Logarithmen von dem gegebenen höheren, (doch ohne die Charakteristik zu subtrahiren) und hänge an die Differenz so viele Nullen an, als die Differenz der beyden Charakteristiken beyder Logarithmen beträgt.

3.) Man subtrahire den gefundenen niedrigeren Logarithmen von dem nächstfolgenden höheren, und dividire mit der Differenz in die durch die vorige Operation mit Nullen vermehrte Differenz.

4.) Endlich setze man den Quotienten an die durch die erste Operation gefundene 4 Ziffern, so gibt die ganze Zahl den Werth des gegebenen Logarithmen.

Z. B. Es sey der Logarithmus 6,6973884 gegeben.

gegebener Logar. = 6,6973884
gefundener Logar. = 3,6973165 = Zahl 4981.
719 = Differenz.
mit Nullen vermehrt 719000
gefundener höherer Logar. = 3,6974037
. . . . niedrigerer = 3,6973165
Differenz = 872

872 in 719000 ($824\frac{472}{872}$ oder fast 825

demnach werden noch 825 angehängt, und die ganze Zahl ist 4981825.

§. 80.

Aufgaben über die Logarithmen.

*) Man suche $\sqrt[4]{\frac{7364^3}{5499^2}}$

so ist diese ganze zusammengesezte Grösse

$$= \frac{3.\log.7364 - 2.\log.5499}{4}$$

so kommt der Logarithmus 1,0301935 dieser fällt, wie er da stehet, zwischen 10 und 11. Man suche ihn unter der Charakteristik 2, so fällt er zwischen 10,7 und 10,8. Man suche ihn unter der Charakt. 3, so fällt er fast auf 10,72.

*) Man suche $2^x = 8192$

$x.\log.2. = l.8192$

$x = \frac{l.8192}{l.2} = \frac{3,9133899}{0,3010300} = 12,99$. Also fast 13, und es ist auch wirklich 13. Welches deswegen hier nicht ganz kommt, weil man nur in Stücken von Logarithmen rechnet.

*) Man soll zwischen 2 gegebenen Zahlen so viele mittlere geometrische Proportionalzahlen finden, als man verlangt.

Auflösung.

Man subtrahire den Logarithmen der kleineren Zahl vom Logarithmen der grösseren, und dividire den kommenden Logarithmen durch die um 1 vermehrte Anzahl der verlangten mittleren Proportionalen, und addire den kommenden Logar. zum Logarithmen der gegebenen kleineren

neren Zahl, so kommt der Logarithmus der ersten mittleren Proportionale. Zu diesem addire man abermal den durch Division gefundenen Logarithmen, so kommt der Logarithmus der zweyten mittleren Proportionale; Und so fahre man fort.

Z. B. man solle zwischen 64 und 2048 vier mittlere geometrische Proportionalzahlen finden.

$$\begin{array}{lrl}
 & \log. 2048 = & 3{,}3113299 \\
 & \log.\ 64 = & 1{,}8061800 \\
\hline
4+1=5 \text{ in} & & 1{,}5051499 \\
\hline
 & & 0{,}3010299\tfrac{4}{5} \\
 & + & 1{,}8061800 = \log. 64. \\
\hline
 & & 2{,}1072099\tfrac{4}{5} = \log. 128 \\
 & + & 0{,}3010299\tfrac{4}{5} \\
\hline
 & & 2{,}4082399\tfrac{3}{5} = \log. 256 \\
 & + & 0{,}3010299\tfrac{4}{5} \\
\hline
 & & 2{,}7092699\tfrac{2}{5} = \log. 512 \\
 & + & 0{,}3010299\tfrac{4}{5} \\
\hline
 & & 3{,}0102999\tfrac{1}{5} = \log. 1024 \\
 & + & 0{,}3010299\tfrac{4}{5} \\
\hline
 & & 3{,}3113299 = \log. 2048
\end{array}$$

Also kommt die Progression 64, 128, 256, 512, 1024, 2048. In diesen Gliedern, und sonst in keinen andern, wenn nur 6 Glieder seyn darfen, kann die Progression wachsen.

*) Wenn man x mit y multiplicirt, so kommt 1690, und wenn man vom logar. von x den logar. von y subtrahirt, so kommt der logar. von 10; Was ist x und y?

$$xy = 1690 \qquad lx - ly = l10$$
$$lx + ly = l1690 \qquad lx = l10 + ly$$
$$lx = l1690 - ly$$
$$l1690 - ly = l10 + ly$$
l1690 ~~— 2ly — l10~~ = l10 + 2ly.
$$2ly = l1690 - l10$$
$$ly = \frac{l1690 - l10}{2}$$
$$ly = 1{,}1139433$$
$$y = 13; \quad \text{also } x = 130.$$

*) Wenn man x durch y dividirt, so ist der Logarithmus des Quotienten gleich dem Logarithmen von 2; wenn man aber x mit y multiplicirt, so kommt 72.

$$\frac{lx}{y} = l.\,2.$$
$$lx - ly = l.\,2.$$
$$lx = l2 + ly$$
$$xy = 72$$
$$lx + ly = l72$$
$$lx = l72 - ly$$
$$l2 + ly = l72 - ly$$
$$l2 + 2ly = l72$$
$$ly = \frac{l72 - l2}{2}$$
$$l72 = 1{,}8573325$$
$$l\,2 = 0{,}3010300$$
$$l72 - l2 = 1{,}5563025$$
durch 2 divid. $= 0{,}7781512\tfrac{1}{2} =$ Log. von $6 = y$.

Also $12 = x$.

§. 81.

Beyspiele der Auflösung der Gleichungen durch Logarithmen.

*) $2^x = 512$

$xl2 = l512$

$$x = \frac{l512}{l2} = \frac{2{,}7092700}{0{,}3010300} = \frac{27092700}{3010300} = 9$$

*) $\sqrt[4]{\frac{a^3}{b^2}} = c$

$$\frac{3la - 2lb}{4} = lc$$

*) $5 \cdot 3^{2x} - 100 = 305$

$5 \cdot 3^{2x} = 405$

$$3^{2x} = \frac{405}{5} = 81$$

$2xl3 = l81$

$$x = \frac{l81}{2l3} = \frac{l81}{l3^2} = \frac{l81}{l9} = \frac{1{,}9084850}{0{,}964242425} = 2$$

*) $b = am^{x-1}$

$$\frac{b}{a} = m^{x-1}$$

$lb - la = x - 1\,(lm)$

$lb - la = xlm - lm$

$lb - la + lm = xlm$

$$\frac{lb - la + lm}{lm} = x$$

*) bax

*) $ba^x = mc^x$

$lb + xla = lm + xlc$

$xla - xlc = lm - lb$

$$x = \frac{lm - lb}{la - lc}$$

*) $m^x + bc^x = \frac{ab^x}{d}$

$dm^x + dbc^x = ab^x$

$ld + xlm + ld + lb + xlc = la + xlb$

$xlm + xlc - xlb = la - 2ld - lb$

$$x = \frac{la - 2ld - lb}{lm + lc - lb}$$

*) $\frac{b(m+n)^x}{m^x} = \frac{na}{m} + b$

$lb + xl(m+n) - xlm = l(\frac{na}{m} + b)$

$xl(m+n) - xlm = l(\frac{na}{m} + b) - lb$

$$x = \frac{l(\frac{na}{m} + b) - lb}{l(m+n) - lm}$$

Das siebente Kapitel.

Die Binomische Regel, zur allgemeinen Potenzirung und Wurzel-Ausziehung.

§. 82.

Wenn man ein Binomium auf höhere Potenzen, z. B. in den Cubus erhebt, so ist in diesem Produkt

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

eine gedoppelte Gattung von Zahlen:

1.) Exponenten, wie 3, 2, 2, 3,

2.) Coefficienten, (oder Unzen) wie 1, 3, 3, 1.

Nun gibt es Vortheile, diese Dignitäten und Unzen zu bestimmen, ohne würklich zu multipliciren.

§. 83.

Man bekommt aber:

1.) die Exponenten also:

Man fängt von der höchsten verlangten Potenz des a an, und gehet herab bis auf a^0 oder 1. und darunter fängt man von b^0 oder 1 an, und gehet bis zur höchsten Potenz fort:

Neml. $a^7 \quad a^6 \quad a^5 \quad a^4 \quad a^3 \quad a^2 \quad a^1 \quad a^0$

$$b^0 \quad b^1 \quad b^2 \quad b^3 \quad b^4 \quad b^5 \quad b^6 \quad b^7$$

$$a^7 + a^6b + a^5b^2 + a^4b^3 + a^3b^4 + a^2b^5 + \\ + ab^6 + b^7$$

2.) Die Coefficienten entstehen aus den verwechselt unter einander geschriebenen und nach und

nach in sich multiplicirten und dividirten Anfangszahlen:

Z. B. $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + \frac{3}{1}a^2b +$

$+ \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2}ab^2 + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3}b^2$

*) $a^7 + \frac{7}{1}a^6b + \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2}a^5b^2 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^4b^3 +$

$+ \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}a^3b^4 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}a^2b^5 +$

$+ \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}ab^6 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}b^7 =$

$= a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 +$

$+ 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$

Beyspiel.

*) $a^4 \quad a^3 \quad a^2 \quad a^1 \quad a^0$

$b^0 \quad b^1 \quad b^2 \quad b^3 \quad b^4$

$a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$

$a^4 + \frac{4}{1}a^3b + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}a^2b^2 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}ab^3 +$

$+ \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}b^4 =$

$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

§. 84.

Bisher war die Potenz determinirt, zu welcher das Binomium erhoben werden sollte. Soll nun auch für eine indeterminirte Potenz eine Formel gefun-

den werden, so nenne man den Exponenten = m, und man bekommt also:

1.) Für die Exponenten:

$$\frac{a^m\ a^{m-1}\ a^{m-2}\ a^{m-3}\ a^{m-4}\ a^{m-5}\ \text{rc.}}{b^0\ b^1\ b^2\ b^3\ b^4\ b^5\ \text{rc.}}$$

$$a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + a^{m-3}b^3 + \\ + a^{m-4}b^4 + a^{m-5}b^5 \text{ rc.}$$

2.) Die Unzen werden gefunden wie vorhin. Nemlich es seyen die Exponenten:

$$\begin{matrix} m & m-1 & m-2 & m-3 & m-4 & m-5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix}$$

so wird

$\frac{m}{1}$ die Unze für den zweyten Terminus der Potenz.

$\frac{m.m-1}{1.2}$ die Unze für den dritten.

$\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}$ die Unze für den vierten.

$\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}$ die Unze für den fünften.

$\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.3.4.5}$ die Unze für den sechsten.

$\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.2.3.4.5.6}$ die Unze für den siebenden rc.

3.) Wenn man nun diese Unzen in ihre correspondirende Terminos multiplicirt, so kommt die Formul:

$$a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m.m-1}{1.2} a^{m-2} b^2 +$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} a^{m-3} b^3 +$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4} a^{m-4} b^4 +$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.3.4.5} a^{m-5} b^5 +$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.2.3.4.5.6}$$

$a^{m-6} b^6$ ꝛc.

4.) Weil aber

$$a^{m-1} = \frac{a^m}{a},\ a^{m-2} = \frac{a^m}{a^2},\ a^{m-3} = \frac{a^m}{a^3} \text{ ꝛc.}$$

so kommt, wenn man diese Werthe substituirt, statt voriger Formul, nun diese:

$$a^m + \frac{m.a^m b}{1.a} + \frac{m.m-1.a^m b^2}{1.2.a^2} +$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2.a^m b^3}{1.2.3.a^3} +$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3.a^m b^4}{1.2.3.4.a^4} +$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.a^m b^5}{1.2.3.4.5.a^5} \text{ ꝛc.}$$

5.) Nennt man ferner

$a = P$ so ist $a^m = P^m$

$\frac{b}{a} = Q$ $\quad \frac{b^2}{a^2} = Q^2$

$\frac{b^4}{a^4} = Q^4$ ꝛc.

und

und es kommt die Reihe:

$$P^m + \frac{m}{1} P^m Q + \frac{m.m-1}{1.2} P^m Q^2 +$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} P^m Q^3 +$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4.} P^m Q^4 \text{ ꝛc.}$$

6.) Endlich nenne man:

$P^m = A$; so ist $\frac{m}{1} P^m Q = \frac{m}{1} AQ.$

$\frac{m}{1} P^m Q = B$; so ist

$$\frac{m.m-1}{1.2} P^m Q^2 = \frac{m-1}{2} BQ.$$

$\frac{m-1}{2} BQ = C$; so ist

$$\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} P^m Q^3 = \frac{m-2}{3} CQ.$$

$\frac{m-2}{3} CQ = D$; so ist

$$\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4.} P^m Q^4 = \frac{m-3}{4} DQ.$$

$\frac{m-3}{4} DQ = E$; so ist

$$\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.3.4.5} P^m Q^5 =$$

$$= \frac{m-4}{5} EQ \text{ ꝛc.}$$

 und

und man erhält die Reihe:

$$(a+b)^m = (P+PQ)^m = P^m + \frac{m}{1}AQ + $$

$$+ \frac{m-1}{2}BQ + \frac{m-2}{3}CQ + \frac{m-3}{4}DQ + $$

$$+ \frac{m-4}{5}EQ + \frac{m-5}{6}FQ. \text{ rc.}$$

§. 85.

Wenn m einen Bruch vorstellt, so wird die Reihe $P^m + \frac{m}{1}AQ + \frac{m-1}{2}BQ$ rc. die undeterminirte Wurzel von $P + PQ$ vorstellen; folglich dienet eben diese Reihe auch zu Ausziehung der Wurzeln. Denn $\sqrt{a} = a^{1:2}$.

Solle nun aus $a^2 - x^2$ die Quadratwurzel gezogen werden, so ist: $m = \frac{1}{2}$, $P = a^2$, $Q = -\frac{x^2}{a^2}$ (weil es ein Bruch ist).

Folglich

$$P^m = a^{2:2} = a = A.$$

$$\frac{m}{1}AQ = \frac{1}{2}a. - \frac{x^2}{a^2} = \frac{-x^2}{2a} = B.$$

$$\frac{m-1}{2}BQ = \frac{\frac{1}{2}-1}{2}.\frac{-x^2}{2a}.\frac{-x^2}{a^2} = \frac{1-2}{4}.\frac{x^4}{2a^3} =$$

$$= \frac{-x^4}{8a^3} = C.$$

m—2

$$\frac{m-2}{3}CQ = \frac{\frac{1}{2}-2}{3} \cdot \frac{-x^4}{8a^3} \cdot \frac{-x^2}{a^2} = \frac{1-4.x^6}{6.8a^5} =$$

$$= \frac{-3x^6}{6.8a^5} = \frac{-x^6}{16a^5} = D.$$

$$\frac{m-3}{4}DQ = \frac{\frac{1}{2}-3}{4} \cdot \frac{-x^6}{16a^5} \cdot \frac{-x^2}{a^2} = \frac{1-6.x^8}{8.16a^7} =$$

$$= \frac{-5x^8}{128a^7} = E.$$

$$\frac{m-4}{5}EQ = \frac{\frac{1}{2}-4}{5} \cdot \frac{-5x^8}{128a^7} \cdot \frac{-x^2}{a^2} = \frac{1-8.5x^{10}}{10.128a^9} =$$

$$= \frac{-7x^{10}}{256a^9} = F. \text{ ꝛc.}$$

Es ist also

$$\sqrt{(a^2-x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} -$$

$$- \frac{5x^8}{128a^7} - \frac{7x^{10}}{256a^9} \text{ ꝛc.}$$

*) Statt m kann man auch m:n setzen, und erhält die Formul:

$$(P+PQ)^{m:n} = P^{m:n} + \frac{m}{n}AQ +$$

$$+ \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ +$$

$$+ \frac{m-3n}{4n}DQ + \frac{m-4n}{5n}EQ \text{ ꝛc.}$$

Will man aber durch diese Formul Grössen auf Potenzen eleviren, so gilt $n=1$.

§. 86.

Beyspiele.

*) Man verlangt die 4te Potenz von 18, oder $10+8$.

So ist nach obigem §.

$m=4,\ P=10,\ Q=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}.$

Folglich

$P^m=10^4=10000=A.$

$mAQ=4.\ 10000.\frac{4}{5}=\frac{160000}{5}=32000=B.$

$\frac{m-1}{2}.BQ=\frac{3}{2}.\ 32000.\frac{4}{5}=\frac{6}{5}.\ 32000=$

$=6.\ 6400=38400=C.$

$\frac{m-2}{3}CQ=\frac{2}{3}.\ 38400.\frac{4}{5}.=\frac{8}{15}.\ 38400=$

$=\frac{307200}{15}=20480=D.$

$\frac{m-3}{4}DQ=\frac{1}{4}.\ 20480.\frac{4}{5}.=\frac{1}{5}.\ 20480=$

$=4096=E.$

$\frac{m-4}{5}EQ=0.\ 4096.\frac{4}{5}=0.$

folgl. 10000 = A
32000 = B
38400 = C
20480 = D
4096 = E

104976 = vierte Potenz von 18.

Wür-

Würde man 18 in andere Theile, z. B. 6 und 12 theilen, so kämen P=6, Q=12:6=2 und hieraus

A= 1296
B=10368
C=31104
D=41472
D=20736
104976 wie oben.

*) Man soll die Quadratwurzel aus 2 extrahiren: Weil das nächste kleinere Quadrat =1, und dieses von 2 abgezogen =1, so ist nach obigem §.

P=1. Ferner m=1
Q=1. n=2

folglich

$$P^{m:n} = 1 = A.$$

$$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2} = B.$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = \frac{-1}{4} . \frac{1}{2} = \frac{-1}{2.4} = C.$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = \frac{-3}{6} . \frac{-1}{2.4} = + \frac{1.3}{2.4.6} = D.$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = \frac{-5}{8} . \frac{1.3}{2.4.6} = \frac{-1.3.5}{2.4.6.8} = E.$$

$$\frac{m-4n}{5n}EQ = \frac{-7}{10} \cdot \frac{-1.3.5}{2.4.6.8} = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10} - \text{ꝛc.}$$

folglich ist

$$\sqrt{2} = 1 + \tfrac{1}{2} - \frac{1}{2.4} + \frac{1.3}{2.4.6} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} +$$

$$+ \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10} - \text{ꝛc.}$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} - \tfrac{5}{128} + \tfrac{7}{256} \text{ ꝛc.}$$

Zweyter Abschnitt.

Von der Natur und den Eigenschaften zusammengesezter Gleichungen.

Einleitung.

Vom Ordnen der Gleichungen, ihren Graden, Reduktion und Wurzeln überhaupt.

§. 87.

Da der Verfasser in dem unten angeführten Werke des gelehrten Mathematikers und Naturforschers *P. Mako* *) die Lehre von den zusammengesezten Gleichungen eben so faßlich als gründlich abgehandelt fand, so glaubte er, nichts besseres thun zu können, als solches hier ganz zum Grunde zu legen, und das hieher gehörige daraus zu übertragen, und in der Folge die nöthigen Zusäze beyzubringen.

*) De Arithmeticis et Geometricis æquationum Resolutionibus. Libri Duo. Quos in tironum usum elucubratus est P. Mako. Vindob. Typis Jo. Thom. Nob. de Trattnern. Anno MDCCLXX.

Vom Ordnen einer Gleichung.

§. 88.

Eine Gleichung ordnen heißt, alle Glieder der Gleichung auf Eine Seite bringen, also, daß alle

zu=

zusammen = o werden. Zuerst wird dasjenige Glied gesezt, worinnen die höchste Potenz der unbekannten Grösse vorkommt, und zwar wird dieses Glied positiv und von allen Coefficienten oder Divisoren frey gemacht, sodann folgen die andere niedrigere Potenzen in der Ordnung auf einander; und wenn etwa eine Potenz durch mehrere bekannte Grössen multiplicirt ist, so werden alle diese Produkte unter einander geschrieben, und also angesehen, als ob sie alle zusammen ein einziges Glied ausmachten. Ist ein Produkt aus lauter bekannten Grössen vorhanden, so wird solches als das lezte Glied der Gleichung gesezt. Die bekannte Grössen, durch welche die Potenzen der unbekannten multiplicirt werden, nennet man die Coefficienten dieser Glieder.

Z. B. Die Form einer recht geordneten Gleichung ist

$$x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + rx^{m-3} \ldots + t = 0.$$

wo die Grössen p, q, r, t jede positive oder negative Grössen, oder jede Aggregaten von bekannten Grössen bezeichnen. Und zwar ist p der Coefficient des 2ten Gliedes, q des dritten, r des vierten ꝛc. Wenn man also mit dieser Generalgleichung folgende vergleicht:

$$x^4 + \left.\begin{matrix}\dfrac{a^2}{2b}\\ -\dfrac{3bc}{d}\end{matrix}\right\} x^3 \left.\begin{matrix}+\dfrac{a^2}{4f}\\ -\dfrac{2a^3d}{f}\end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix}-\dfrac{2a^3}{b}\\ +\dfrac{2d^3}{h}\end{matrix}\right\} x + c^3 = 0,$$

so ist der Exponent $m = 4$; $p = \dfrac{a^2}{2b} - \dfrac{3bc}{d}$ der Coefficient des zweyten Gliedes; $q = \dfrac{a^3}{4f} - \dfrac{2a^3d}{f}$ der Coefficient des dritten Gliedes,

r =

$r = \frac{2d^3}{h} - \frac{2a^3}{h}$ der Coefficient des vierten Gliedes; $t = c^3$ das lezte Glied.

Wenn irgend eine Potenz der unbekannten Grösse nach der höchsten nicht vorhanden ist, so wird sie bey Zählung der Glieder also angesehen, als wäre sie da, und ihr Coefficient wäre $= 0$, und daher wird ihre Stelle öfters durch ein Zeichen * ausgefüllet.

Z. B. In der Gleichung $x^3{}_* - 2x + s = 0$ ist $-2x$ nicht das 2te Glied, sondern das 3te: denn das 2te wird für $0x^2$ angesehen, und fehlet. Wenn also diese Gleichung mit obiger allgemeinen Formul verglichen wird, so ist $m = 3$, $p = 0$, $q = -2$, $t = s$.

§. 89.

Bestimmung des Grades, oder der Ordnung einer Gleichung.

Man sagt von einer determinirten Gleichung, sie sey von demjenigen Grad, oder Ordnung, zu welchem der gröste Exponent der unbekannten Grösse aufsteiget.

Z. B. $x^2 + px = m$ ist vom 2ten Grad.
$x^3 - xm = d$ ist vom 3ten Grad.

Allein man hat hiebey folgende Vorsicht anzuwenden:

Solle der Grad einer Gleichung angegeben werden, so muß vorher die Irrationalität, die unter einem Wurzelzeichen enthalten ist, weggeschafft werden.

Z. B. die Gleichung

$$2x - \sqrt{3x} - 3 = 0$$

ist

ist nicht vom 1sten, sondern vom 2ten Grad; denn wenn man die Irrationalität aufgehoben, (S. davon unten) durch Elevation, so kommt

$$4x^2 - 3x + 9 = 0.$$

Ferner müssen die Brüche, deren Nenner die unbekannte Grösse enthält, weggeschafft werden.

Z. B. $x^2 + \frac{10}{x} - 27 = 0$ ist vom 3ten Grade, denn nach Wegschaffung des Bruchs kommt

$$x^3 - 27x + 10 = 0.$$

§. 90.

Wenn in einer Gleichung Wurzelglieder vorhanden sind, welche unter dem Wurzelzeichen lauter bekannte Grössen begreiffen, so wird sie zwar in der Auflösung und Ausfindung des unbekannten eben so behandelt, als wäre sie von dem Grade, den der höchste Exponent der unbekannten Grösse angibt; allein ihrer Natur selbst nach betrachtet, ist sie von höherer Ordnung, wozu sie nemlich nach Wegschaffung des Wurzelzeichens reducirt wird.

Z. B. die Gleichung

$$x^2 - 2x\sqrt{3} + 4 = 0$$

wird zwar so behandelt, als wie die Gleichungen 2ten Grades; an sich selbst aber ist sie vom 4ten Grade, denn es ist:

$$x^2 + 4 = 2x\sqrt{3}$$

und beyderseits ins Quadrat erhoben

$$x^4 + 8x^2 + 16 = 12x^2$$

$$x^4 - 4x^2 + 16 = 0.$$

Der Grad einer undeterminirten Gleichung, oder welche mehrere unbekannte Grössen enthält, wird nicht

nicht nur allein von den Exponenten der unbekannten Grössen hergenommen, sondern auch von den Dimensionen, zu denen ihre Produkte aufsteigen.

Z. B. Obwohl in der Gleichung $ax + xy = b^2$ alle unbekannte Grössen ersten Grades sind, so hat doch das Produkt xy zwey Dimensionen, und die Gleichung selbst ist daher 2ten Grades.

Aus eben der Ursache ist die Gleichung $x^2 + axy^2 - b^2 = 0$ dritten Grades, denn das Produkt xy^2 hat 3 Dimensionen.

§. 91.

Reduktion der Gleichungen.

Eine Gleichung heißt Reducibel (*Reducibilis*), wenn sie durch eine andere Gleichung niedrigeren Grades, welche ohne Wurzelzeichen ist, genau dividirt werden kann; wodurch man sie demnach auf einen niedrigeren Grad herunter bringt.

Kann aber die Gleichung auf solche Art nicht herunter gebracht werden, so heißt sie Irreducibel. (*Irreducibilis.*) (*In propria sede.*)

Z. B. die Gleichung $x^3 - 10x^2 + 34x - 40 = 0$ kann durch die Gleichung $x - 4 = 0$ genau dividirt werden, und kommt dadurch herunter auf

$$x^2 - 6x + 10 = 0$$

aber diese leztere ist irreducibel, da sie durch keine andere niedrigerer Ordnung, und ohne Radicalzeichen, dividirt werden kann, daß alles aufgehet.

§. 92.

§. 92.

Wenn in 2 Gleichungen eben dieselbe unbekannte Grösse zu mehreren Dimensionen steiget, so kann sie durch Hülfe derselben jedesmal weggeschafft und endlich zu einer solchen Gleichung gebracht werden, wo jene unbekannte Grösse nimmer unbekannt ist. Denn

1.) Wenn in jeder von beyden Aequationen eben derselbe höchste Exponent von x vorkommt, so suche man beyderseits den Werth der höchsten Potenz von x, und aus diesen beyden gleichen Werthen erhält man eine neue Gleichung, welche jene unbekannte Grösse schon weniger elevirt enthält. Aus dieser neuen Gleichung suche man abermal den Werth der höchsten Potenz des unbekannten x, und multiplicire sodann sowohl diese Potenz als den anderen Theil der Gleichung mit eben diesem unbekannten x, damit man noch einmal den Werth der Potenz erhalte, den man bey voriger Operation gefunden hatte. Dieser, mit einem der vorigen Werthe in eine Gleichung gesezt, gibt x abermal weniger elevirt. Und so kommt man immer auf andere 2 Gleichungen, worinnen x immer weniger elevirt ist, bis man endlich auf zwey solche gelanget, in denen x nur in der ersten Potenz vorhanden ist, woraus man x selbst finden kann.

2.) Wenn aber in beyden gegebenen Gleichungen die höchste Potenzen der unbekannten Grösse ungleich wären, z. B. in der einen x^3, in der anderen x^2, so multiplicirt man die leztere Gleichung mit x, daß man einerley höchste Potenz erhalte, und verfährt übrigens wie oben.

Es seyen die 2 Gleichungen:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$ex^3 + fx^2 + gx + h = 0$$ man solle x finden.

Man suche beyderseits x^3 so kommt

$$x^3 = \frac{-bx^2 - cx - d}{a}$$

$$x^3 = \frac{-fx^2 - gx - h}{e}$$ folgl.

$$\frac{-bx^2 - cx - d}{a} = -\frac{fx^2 - gx - h}{e}$$

$$ebx^2 + ecx + ed = afx^2 + agx + ah$$

Man suche x^2, so ist

$$x^2 = \frac{agx - ecx + ah - ed}{eb - af}$$

und mit x multiplicirt, kommt

$$x^3 = \frac{agx^2 - ecx^2 + ahx - edx}{eb - af}$$

und diese Aequation mit einer von den vorigen verglichen:

$$\frac{agx^2 - ecx^2 + ahx - edx}{eb - af} = -\frac{bx^2 - cx - d}{a}$$

Man hat also nun 2 Gleichungen, in denen die höchste Potenz von x mehr deprimirt ist, und kann daraus und nach obiger Methode leicht auf 2 andere kommen, worinnen die höchste Potenz x selbst ist, woraus man endlich x selbst findet.

Wurzeln einer Gleichung.

§. 93.

Was eine Wurzel sey.

Der Werth einer unbekannten Grösse, welcher für diese unbekannte Grösse gesezt, die Gleichung darstellt, oder nachdem sie gehörig geordnet worden, auf 0 bringt, heißt die Wurzel der Gleichung.

Z. B. Bey der Gleichung $x - \frac{1}{2}x - 4 = 0$ ist die Wurzel $= 8$, denn wenn 8 für x gesezt wird, so kommt $8 - 4 - 4 = 0$.

Bey $x^2 - 6x + 8 = 0$ sind die Wurzeln 2 und 4, denn $4 - 12 + 8 = 0$ und $16 - 24 + 8 = 0$

Bey $x^2 - 3x - 10 = 0$ sind die Wurzeln 5 und -2, denn $25 - 15 - 10 = 0$ und $4 + 6 - 10 = 0$

Man erkennet also leicht, ob eine Grösse eine Wurzel einer gegebenen Gleichung sey, wenn man sie nemlich für die unbekannte Grösse setzet, und siehet, was sich sodann ergibt.

§. 94.

Wahre und falsche Wurzel.

Wenn die Grösse, welche man für die unbekannte substituiret, und welche die Gleichung sodann darstellet, positiv ist, so nennet man sie eine wahre Wurzel.

Wenn sie aber negativ ist, so nennt man sie eine falsche Wurzel.

Z. B. Bey $x^2 - 3x - 10 = 0$. ist die wahre Wurzel $= 5$, und die falsche Wurzel $= -2$.

Wenn

Wenn man bey Auflösung einer Aufgabe auf eine Gleichung kommt, welche blos falsche Wurzeln hat, so ist es ein Anzeigen, daß die Aufgabe nicht recht gefaßt worden, sondern anders hätte vorgetragen werden sollen. Z. B. Man fragt, was derjenige habe, der 100 fl. gewonnen hat, und bey dem man 60 fl. findet. So ist

$$x + 100 = 60$$
$$x = 60 - 100$$
$$x = -40$$

Man hätte demnach also fragen sollen: was demjenigen fehle, der 100 fl. gewonnen hat, und bey dem man nur 60 fl. findet.

Ueberhaupt muß der Werth einer falschen Wurzel allemal im entgegengesezten Sinn genommen werden, als er beym Vortrage der Bedingungen der Aufgabe gebraucht worden.

§. 95.

Wenn aus einer gegebenen Gleichung die Wurzel nicht genau ausgezogen werden kann, so kommt es

entweder daher, daß die Grösse, aus welcher die Wurzel auszuziehen wäre, keine vollkommene Potenz derjenigen Ordnung ist, von welcher Ordnung man eine Wurzel verlangt;

oder daß diese Grösse negativ ist, und man eine Wurzel von gerader Ordnung verlangt.

Aus dem ersten Fall entspringt der Unterschied der Rationalen und Irrationalen Wurzeln.

Aus dem anderen Fall der Unterschied unter den Würklichen und Eingebildeten Wurzeln. (*Realium et Imaginariarum.*)

Rationale und Irrationale Wurzeln.

Die Wurzel einer Gleichung, welche von allem Wurzelzeichen oder Verbindung frey ist, heißt eine Rationale Wurzel. (*Rationalis s. Commensurabilis.*)

Z. B. $x = 5$.

Wo aber die Verbindung eines Radicalzeichens vorwaltet, da heißt sie Irrational. (*Irrationalis s. Incommensurabilis.*) wie $x = 2\sqrt{5}$.

§. 96.

Würkliche und Eingebildete Wurzeln.

Wenn eine Wurzel unter einem Würzelzeichen, das einen geraden Exponenten hat, eine negative Grösse enthält, so heißt diese Wurzel Eingebildet, oder Unmöglich. (*Imaginaria.*) Denn die Wurzel eines geraden Exponenten einer negativen Grösse ist unmöglich, wie $x = 3\sqrt{-2}$.

Alle andere Wurzeln, welche nicht von dieser Beschaffenheit sind, heissen Würkliche, (*Reales.*)

Z. B. Die Gleichung $x^3 - 2x + 4 = 0$
hat zur würklichen Wurzel -1
und zu beyden eingebildeten $1 \pm \sqrt{-1}$.

Aber die Gleichung $x^4 + x^2 + 6 = 0$ hat lauter eingebildete Wurzeln: denn was man auch für einen Werth für x sezt, so werden alle Glieder positiv; sie können also sich unter einander nicht aufheben, oder alle zusammen niemal $= 0$ werden. Hieraus erhellet, daß eine Wurzel, welche für x substituirt, die Gleichung verificiret oder darstellet, etwas unmögliches sey. Ja auch sogar, wenn man $x = 0$ sezt: denn wenn auch alle andere Glieder verschwinden, so bleibt

bleibt doch das lezte $+6$, und dieses wird niemals $=0$.

Von dieser Art sind alle diejenige Gleichungen, worinnen keine Potenz der unbekannten Grösse von einem ungeraden Exponenten vorkommt, und alle Glieder positiv sind, wovon das lezte keine unbekannte Grösse enthält.

Wenn also eine Aufgabe, aus deren Bedingungen die Gleichung entstehet, durch die Wurzeln der Gleichung aufgelöst werden solle, und alle Wurzeln der Gleichung sind eingebildet, so ist es ein Beweis, daß die Aufgabe unter diesen Ausdrücken, worinnen sie gefaßt ist, einen Widerspruch in sich habe. Z. B. man sucht eine Zahl x, deren 4te Potenz samt dem doppelten Quadrat eine negative Summe gebe, $-a$.

Also $x^4 + 2x^2 = -a$

$x^4 + 2x^2 + a = 0$

Diese Gleichung hat lauter imaginäre Wurzeln; daher ist die gesuchte Zahl unmöglich.

Endlich heissen sowohl irrationale als eingebildete (imaginäre) Wurzeln Einfach (*Simplices*), wenn sie nur allein aus Gliedern bestehen, welche das Radikalzeichen haben z. B. $2\sqrt{-3}$; $a\sqrt{(2+\sqrt{5})}$; hingegen heissen sie Vermischt (*Mixtæ*), wenn sie theils aus rationalen Gliedern, theils radikalen bestehen, dergl. sind $a+2\sqrt{3}$, $2b-(3+\sqrt{-a^2}.)$

Das erste Kapitel.

Vom Ursprung und Entstehung zusammengesezter Gleichungen.

§. 97.

Gleichwie die Kunst, Wurzeln aus den Potenzen zu ziehen, aus der gehörigen Einsicht fliesset, wie die Potenzen selbst formirt werden; so folget auch gänzlich die Methode Gleichungen aufzulösen aus der rechten Einsicht, wie Gleichungen zusammengesezt werden.

Man kann sich aber jede Gleichung höherer Ordnung also vorstellen, als entstehe sie aus Multiplication von Gleichungen niedrigerer Grade unter sich; eben so, wie höhere Potenzen aus Multiplication von niedrigeren entstehen.

Z. B. Man nehme zu Wurzeln einer Gleichung die Grössen an: a, b, c, — d, — e ꝛc. so werden daraus eben so viele einfache Gleichungen entstehen: $x - a = 0$; $x - b = 0$; $x - c = 0$; $x + d = 0$; $x + e = 0$. ꝛc. welche unter sich multiplicirt jene Gleichung zusammensetzen werden, deren Wurzeln jene angenommene Grössen sind.

Nemlich das Produkt aus den zwey Ersten $(x - a).(x - b)$ wird die Gleichung seyn:

$$\begin{aligned} x^2 - ax &+ ab = 0. \\ - bx & \end{aligned}$$

vom zweyten Grade, welche die Wurzeln a und b hat.

Das

Das Produkt aus dreyen $(x-a).(x-b).(x-c)$ wird die Gleichung:

$$x^3 \left.\begin{matrix}-a\\-b\\-c\end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix}+ab\\+ac\\+bc\end{matrix}\right\} x - abc = 0.$$

vom dritten Grade, welche die Wurzeln a, b, und c hat.

Das Produkt aus 4, neml. $(x-a).(x-b).(x-c).(x+d)$ gibt die Gleichung:

$$x^4 \left.\begin{matrix}-a\\-b\\-c\\+d\end{matrix}\right\} x^3 \left.\begin{matrix}-ad\\-bd\\-cd\\+ab\\+ac\\+bc\end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix}-abc\\+abd\\+acd\\+bcd\end{matrix}\right\} x - abcd = 0.$$

vom vierten Grade, deren Wurzeln sind a, b, c, und $-d$, u. s. w.

§. 98.

Zusatz 1. Allgemein also, wird aus einer Anzahl m von Gleichungen ersten Grades eine Gleichung vom Grade m: Aus 2 Gleichungen vom Grade m und n kommt eine Gleichung vom Grade $m+n$; denn die erste derselben wird von x^m anfangen, und die lezte von x^n, also die daraus zusammengesezte Gleichung von x^{m+n}.

Zusatz 2. Und da die unbekannte Potenzen in der Ordnung abnehmen, und die unbekannte im lezten Gliede fehlet, so ist klar, daß die Anzahl der Glieder einer jeden Gleichung, darinnen kein Glied fehlet, richtig ausgedrückt werde, wenn man den Exponenten des Grades der Gleichung um 1

vermehrt. So hat eine Gleichung dritten Grades $3+1=4$ Glieder; vom 4ten Grade 5 Glieder, u. s. f.

Zusaz 3. Jede Gleichung höherer Ordnung kann angesehen werden als zusammengesezt aus Multiplication so vieler einfachen Gleichungen, als sie Grade hat, deren Wurzeln eben dieselbe mit den Wurzeln der zusammengesezten Gleichung sind: oder zusammengesezt aus so vielen Gleichungen, in denen die Summe der Dimensionen so groß ist, als der Grad jener zusammengesezten Gleichung.

Z. B. Eine Gleichung vierten Grades kann angesehen werden, als aus 4 einfachen Gleichungen zusammengesezt; oder aus 2 vom 2ten Grade; oder aus 2 vom 1sten und einer vom zweyten Grade; oder endlich aus einer vom ersten und einer vom dritten Grade.

Zusaz 4. Daß aber die Wurzeln einer zusammengesezten Gleichung einerley mit denjenigen seyen, welche die zusammensezenden Gleichungen haben, ist ganz deutlich. Denn wenn ein Werth, den man für die unbekannte Grösse x in einer von den zusammensezenden Gleichungen sezet, macht, daß dieselbe verschwinde, oder $=0$ werde, so wird eben derselbe, für x in der zusammengesezten angenommen, eben das zuwegen bringen, daß sie $=0$ werde. Denn wenn einer von den Faktoren $=0$ ist, so wird auch das Produkt, oder die ganze zusammengesezte Gleichung $=0$; da Grössen, welche man auch will, mit 0 multiplicirt, $=0$ geben müssen.

Zusaz 5. Jede zusammengesezte Gleichung hat so viele Wurzeln, als Einheiten die Zahl hat, so den Grad der Gleichung bestimmt. Also eine Gleichung

chung zwenten Grades 2, eine dritten Grades 3, eine vierten Grades 4 ꝛc. da sie aus eben so vielen einfachen Gleichungen zusammengeschmolzen ist, und jede von diesen Eine Wurzel hat.

Anmerk. Es darf einem Anfänger nicht widersinnig scheinen, daß eben dieselbe Gleichung mehrere Wurzeln haben könne; denn ein und eben dasselbe determinirte Problem, aus dessen Bedingungen die Gleichung entstehet, hat öfters mehrere Auflösungen, deren jeder eine von den Wurzeln der Gleichung zugehören muß. Z. B. Man sucht eine Zahl, welche von 5 abgezogen einen solchen Rest gebe, daß das Produkt aus diesem Rest in die Zahl selbst $= 6$ sey: so ist die Gleichung, welche diese Frage auflöst, $x^2 - 5x + 6 = 0$. deren Wurzeln sind 2 und 3, davon jede der Aufgabe Genüge thut.

Zusaz 6. Da eine Wurzel einer negativen Potenz, welche einen geraden Exponenten haben soll, unmöglich ist, so kann es in allweg geschehen, daß eine Gleichung imaginäre Wurzeln habe, wenn sie auch gleich in ihren Coefficienten keine Radikalgrössen involviret. Z. B. die Wurzeln der Gleichung $x^2 + a^2 = 0$ sind $+\sqrt{-a^2}$ und $-\sqrt{-a^2}$, also imaginär. Welches sich allein in denjenigen also zuträgt, welche blos aus Gleichungen 2ten Grades formirt werden, oder deren Exponent eine gerade Zahl ist: denn hier wird die Irrationalität, welche die Wurzeln involviren, durch wechselseitiges Multipliciren gehoben, also daß die zusammengesezte Gleichung keine dergleichen mehr hat.

Zusaz 7. Wenn in einer Gleichung von einem ungeraden Grade allein das erste Glied samt dem lezten vorhanden ist, so scheinet sie nur eine einzige Wur-

zel zu haben. Z. B. Die Wurzel der Gleichung $ax^3 - b^4 = 0$ scheinet nur $x = \sqrt[3]{\frac{b^4}{a}}$ zu seyn. Allein man drücke jene Gleichung in dieser Form aus: $x^3 - \frac{b^4}{a} = 0$, und ihre obige Wurzel in dieser: $x - \sqrt[3]{\frac{b^4}{a}} = 0$, hiedurch dividire man die Gleichung selbst, so entstehet eine Gleichung 2ten Grades, welche beyde übrige Wurzeln enthält. Daß dieses bequem geschehen möge, setze man $\frac{b^4}{a} = c^3$, so ist $x^3 - c^3 = 0$, und $x - c = 0$, und wenn man die erste Gleichung durch die zweyte dividiret, so kommt der Quotient $x^2 + cx + c^2 = 0$ und daher $x = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{-\frac{3}{4}c^2}$. Substituirt man für c den Werth $\sqrt[3]{\frac{b^4}{a}}$, so hat man von der gegebenen Gleichung $x^3 - \frac{b^4}{a} = 0$ ihre beyde übrige Wurzeln, nemlich $x = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b^4}{a}} \pm \sqrt{(-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{b^8}{a^2}})}$.

§. 99.

Wir wenden uns aber wieder zur Zusammensezung der Gleichungen. Wenn eine beliebige Anzahl einfache Gleichungen angenommen, und durch ihre Multiplication unter sich eine zusammengesezte Gleichung hervorgebracht worden, so können Anfänger aus ihrer aufmerksamen Betrachtung sehr leicht folgende Sätze als Schlüsse daraus herleiten:

1.) Das

1.) Das erste Glied enthalte die unbekannte Grösse allein, welche zur Potenz elevirt ist, welche die Zahl der angenommenen einfachen zusammensetzenden Gleichungen anzeigt, ohne irgend einen Coefficienten.

2.) Das 2te Glied enthalte eben dieselbe unbekannte Grösse, aber um einen Grad niedriger, und sein Coefficient sey die Summe aller Wurzeln mit dem entgegengesezten Zeichen genommen.

3.) Das 3te Glied enthalte abermal dieses Unbekannte, um 2 Grade nun niedriger, und sein Coefficient sey die Summe der Produkte aus je 2 Wurzeln, mit dem eigenen Zeichen genommen.

4.) Das 4te Glied enthalte abermal die unbekannte Grösse, nun um 3 Grade niedriger, und sein Coefficient sey die Summe der Produkte aus je 3 Wurzeln, mit dem entgegengesezten Zeichen genommen; u. s. f.

5.) Endlich das lezte Glied enthalte diese unbekannte Grösse nicht, und sey ein Produkt aus allen Wurzeln mit ihren Zeichen, oder auch mit dem entgegengesezten, je nachdem die Aequation von einem geraden oder ungeraden Grade ist. Denn wenn man das Zeichen der Faktoren von einer geraden Anzahl ändert, so bleibt das Zeichen des Produkts unverändert; hingegen wird dieses verändert, wenn man das Zeichen der Faktoren von einer ungeraden Anzahl ändert: die Wurzeln aber werden bey Formirung der einfachen zusammensezenden Gleichungen jedesmal mit dem entgegengesezten Zeichen genommen.

Z. B.

Z. B. Es seyen die Wurzeln irgend einer Gleichung a, b, c, d, e ꝛc. so werden die einfache Gleichungen, welche sie zusammensetzen $x-a=0$, $x-b=0$, $x-c=0$, $x-d=0$, $x-e=0$. ꝛc. deren Anzahl man setze $=m$; so wird folgende Gleichung aus ihnen zusammengesezt:

$$x^m \left.\begin{matrix}-a\\-b\\-c\\-d\\-e\end{matrix}\right\} x^{m-1} \left.\begin{matrix}+ab\\+ac\\+ad\\+ae\\+bc\\+bd\\+be\\+cd\\+ce\\+de\\\&c.\end{matrix}\right\} x^{m-2} \left.\begin{matrix}-abc\\-abd\\-abe\\-acd\\-ace\\-ade\\-bcd\\-bce\\-bde\\-cde\\\&c.\end{matrix}\right\} x^{m-3}$$

$$\left.\begin{matrix}+abcd\\+abce\\+abde\\+bcde\\\&c.\end{matrix}\right\} x^{m-4} \;\&c. - abcde \;\&c. = 0$$

Aus aufmerksamer Betrachtung dieser Gleichung wird die Wahrheit alles dessen deutlich, was oben gesagt worden.

§. 100.

Zusatz 1. In obiger Gleichung, wo alle Wurzeln, a, b, c &c. positiv sind, wechslen die Zeichen der Glieder mit + und — ab: und so läßt sich auch umgekehrt aus Induktion der Schluß machen, daß eine Aequation, deren Zeichen solchergestalt abwechslen, lauter positive Wurzeln habe.

Zusatz

Zusaz 2. Wären alle Wurzeln negativ, oder die einfache zusammensezende Gleichungen wären $x+a=0$, $x+b=0$, $x+c=0$, ꝛc. so wären alle Glieder der zusammengesezten Gleichung offenbar positiv, und es fände keine Abwechslung der Zeichen + und — statt: und eben so erhellet auch auf der andern Seite durch Induktion, daß eine Gleichung von lauter positiven Gliedern lauter positive Wurzeln habe.

Zusaz 3. Aus eben der Induktion erhellet überhaupt, daß jede Aequation so viele positive Wurzeln habe, so viel in ihren Gliedern Uebergänge vom Zeichen + zu —, oder vom Zeichen — zum Zeichen + vorhanden sind; und so viele negative Wurzeln, so viele Fortsezungen eben derselben Zeichen da sind.

Z. B. Gleichungen ersten Grades haben 2 Glieder; hat nun jedes davon eben dasselbe Zeichen, so wird die Wurzel negativ seyn; haben sie aber entgegengesezte Zeichen, so wird die Wurzel positiv werden. Es sey $x+p=0$, oder $-x-p=0$, so ist immer $x=-p$. Aber wenn $x-p=0$, oder $-x+p=0$, so ist allemal $x=p$.

In einer Gleichung zweyten Grades,

$$\begin{aligned} x^2 &+ ax + ab = 0 \\ &+ bx \end{aligned}$$

wo keine Veränderungen der Zeichen sind, sind beyde Wurzeln negativ; aber in der Gleichung

$$\begin{aligned} x^2 &- ax - ab = 0 \\ &+ bx \end{aligned}$$

ist die eine Wurzel positiv, die andere negativ; denn es mag nun das 2te Glied positiv seyn oder negativ, so hat man immer Eine Fortsezung gleicher Zeichen, und Eine Wechslung.

In einer Gleichung dritten Grades können

1.) Alle Zeichen abwechslen, und daher alle Wurzeln positiv seyn, wie in dieser: $(x-a).(x-b).(x-c)=$

$$=x^3-ax^2+abx-abc=0$$
$$\quad -bx^2+acx$$
$$\quad -cx^2+bcx$$

2.) Es können alle Zeichen fortsetzen, und daher alle Wurzeln negativ seyn, wie in dieser: $(x+a).(x+b).(x+c)=$

$$=x^3+ax^2+abx+abc=0$$
$$\quad +bx^2+acx$$
$$\quad +cx^2+bcx$$

3.) Es können 2 Abwechslungen der Zeichen und Eine Fortsetzung vorhanden seyn, daher also 2 Wurzeln positiv werden, und eine negativ, wie in dieser: $(x-a).(x-b).(x+c)=$

$$=x^3\left.\begin{matrix}-a\\-b\\+c\end{matrix}\right\}x^2\left.\begin{matrix}+ab\\-ac\\-bc\end{matrix}\right\}x+abc=0$$

Da das erste und lezte Glied positiv sind, so müssen nothwendig 2 Abwechslungen der Zeichen vorkommen. Denn wenn $a+b>c$, so wird das 2te Glied negativ; wenn aber $a+b<c$, so wird das 3te Glied negativ; denn $ab<(a+b)^2$; nun ist aber in diesem Fall $(a+b)^2<(a+b)c$ oder $<ac+bc$; also um so mehr $ab<ac+bc$.

4.) Es können 2 Fortsetzungen der Zeichen und Eine Wechslung vorhanden seyn; also 2 negative Wurzeln und eine positive, wie in dieser: $(x+a).(x+b).(x-c)=$

$=x^3$

$$=x^3 \left.\begin{matrix}+a\\+b\\-c\end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix}+ab\\-ac\\-bc\end{matrix}\right\} x - abc = 0$$

Da hier das erste Glied positiv, und das lezte Glied negativ ist, so muß nothwendig nur eine einzige Wechslung der Zeichen vorhanden seyn, und 2 Fortsezungen: denn wenn $a + b < c$, so wird das 2te und 3te Glied negativ; wenn aber das 2te positiv ist, gesezt, daß $a + b > c$, was nun auch das 3te seyn mag, so ist klar, daß nur Eine Verwechslung der Zeichen und 2 Fortsezungen seyn werden.

Eben diese Schlüsse gelten auch von höheren Gleichungen.

Zusaz 4. Was aber hier von Abwechslungen der Zeichen gesagt worden, das findet nur statt, wenn man reale Wurzeln zu untersuchen hat, nicht aber bey imaginären.

Z. B. In der Gleichung $x^2 - 2x + 7 = 0$ scheinen aus der Abwechslung der Zeichen 2 positive Wurzeln zu seyn, sie sind es aber nicht, und es wird dieses folgender Gestalt gefunden: Man multiplicire diese Gleichung durch $x + 3 = 0$, so kommt $x^3 + x^2 + x + 21 = 0$, wo die Austheilung der Zeichen anzeigte, daß alle Wurzeln negativ seyen; (Zus. 2.) also müßten jene 2 vorhergehende, welche diesen beyden Gleichungen gemein sind, nach obigem positiv seyen; da nun dieses absurd ist, so erhellet, daß sie imaginär seyen, nemlich $= 1 \pm \sqrt{-6}$.

Eben so sey die Gleichung $x^3 + px^2 + + 3p^2 x - q = 0$. Wenn man die Zeichen be-

betrachtet, so scheinet die Gleichung eine positive und 2 negative Wurzeln zu haben; allein man bringe eine neue positive Wurzel in sie, $= 2p$, nemlich durch Multiplication mit $x - 2p = 0$, so wird folgende Gleichung aus ihr:

$$x^4 - px^3 + p^2x^2 \left.\begin{matrix} - 6p^3 \\ - q \end{matrix}\right\} x + 2pq = 0.$$

welche Kraft der vorigen Gleichung beyde negative Wurzeln derselben haben müßte, und 2 positive, nemlich eine von der vorigen, und die andere eingebrachte 2p; Wenn man aber ihre Zeichen betrachtet, so sollte sie lauter positive Zeichen haben; daher jene beyde, welche in der vorigen Gleichung negativ zu seyn schienen, in der lezteren aber positiv, imaginär sind.

§. 101.

Zusaz 5. Wenn ein Glied in einer Gleichung fehlet, so entstehet bey diesem von den Zeichen hergenommenen Merkmal einiger Zweifel, da man nicht weißt, ob jenes fehlende Glied zu den positiven oder negativen zu zählen sey. Man halte demnach ein solches Glied zuerst für positiv, sodann für negativ: kommen nun bey beyderley Voraussezung einerley Wurzeln, so sind sie so beschaffen, wie sie von den Zeichen angegeben werden; aber diejenigen, welche jene beyde Voraussezungen als entgegengesezt zeigen werden, werden imaginär seyn. Z. B. In der Gleichung

$$x^3 * - 3x + 30 = 0$$

fehlet das 2te Glied; man halte es nun für positiv oder für negativ, so werden immer 2 Verwechslungen der Zeichen vorhanden seyn, und Eine Fortsezung, also werden 2 Wurzeln positiv seyn, und eine negativ.

Aber

Aber in der Gleichung $x^3 * + qx - r = 0$, wenn man das 2te fehlende Glied für positiv halten will, daß daher die Gleichung käme: $x^3 + 0x^2 + qx - r = 0$, zeigt sich, daß eine Wurzel positiv und 2 negativ sind: hält man aber dieses Glied für negativ, daß $x^3 - 0x^2 + qx - r = 0$ kommt, so ergibt sich, daß alle Wurzeln positiv werden. Daher jene beyde Wurzeln, welche in der einen Voraussezung negativ schienen, in der anderen positiv, imaginär sind.

Zusaz 6. Wenn die Wurzeln der Gleichung, davon ein Theil positiv, der andere negativ ist, einander aufheben, so wird ihre Summe, oder der Coefficient des 2ten Gliedes $= 0$, (§. 99.) also wird in diesem Falle das 2te Glied fehlen. Und umgekehrt, wenn in einer Gleichung das 2te Glied fehlt, so ist jene Summe $= 0$, und es heben demnach die positiven und negativen Wurzeln einander auf; denn sonst kann auf keine andere Weise das 2te Glied manglen. Wenn daher in einer Gleichung das 2te Glied fehlet, so ist es ein deutliches Zeichen, daß ihre Wurzeln theils positiv theils negativ seyen, und daß die Summe jener der Summe dieser gleich sey.

Zusaz 7. Auf gleiche Art erhellet, wenn das dritte Glied fehlet, daß die Summe der Produkte aus je 2 Wurzeln, welches der Coefficient des dritten Gliedes ist, $= 0$ werde; wenn das 4te Glied fehlt, daß die Summe der Produkte aus je 3 Gliedern $= 0$ werde, u. s. f.

§. 102.

Zusaz 8. Wenn einige Wurzeln der Gleichung $= 0$ sind, so werden in der Gleichung so viele von den lezten Gliedern fehlen: wenn nemlich Eine Wur-

zel = o ist, so wird das lezte Glied fehlen; sind 2 Wurzeln = o, so werden die 2 lezte Glieder fehlen; bey 3 dergleichen Wurzeln die 3 lezte Glieder u. s. w. Denn da das lezte Glied das Produkt aller Wurzeln ist, so wird, wenn nur eine Wurzel = o ist, auch das Produkt = o seyn, und die gänze Gleichung wird sodann durch x = o dividirt werden, und also um einen Grad herunter gebracht werden können. Und weil der Coefficient des ohneins lezten Gliedes die Summe aller Produkte ist, welche man erhält, wenn man alle Wurzeln nimmt, ausgenommen Eine, so wird, wenn zwey Wurzeln = o, einer von den angenommenen Faktoren = o, und also auch das ohneinslezte Glied = o. Gleichergestalt, weil der Coefficient des vor-ohneinslezten Gliedes (dritten Glieds von hinten an) die Summe aller Produkte ist, welche man erhält, wenn man alle Wurzeln nimmt, ausser 2, so wird, wenn 3 Wurzeln = o sind, abermal einer von den angenommenen Faktoren = o, und daher auch dieses vorohneinslezte Glied = o. Und so auch bey den übrigen.

Zusatz 9. In eben dem Fall ist deutlich, daß eine Gleichung um so viele Grade herunter gebracht werden könne, so viele Glieder fehlen; denn da sodann eben so viele Wurzeln = o sind, so kann auch eben so oft die Gleichung durch x = o dividirt werden.

§. 103.

Zusatz 10. Da das lezte Glied das Produkt aus allen Wurzeln der Gleichung ist, so ist klar, wenn die von allem Bruch befreyte Gleichung eine reale und rationale Wurzel hat, daß diese unter den Faktoren müsse angetroffen werden, oder unter den

gan-

ganzen Divisoren des lezten Gliedes, die sowohl + als — haben: wenn daher kein Divisor des lezten Gliedes eine Wurzel der Gleichung ist, so schliesset man sicher, sie habe keine reale rationale Wurzel.

Zusaz 11. Wenn die Glieder der Gleichung keine imaginäre Grösse involviren, so werden alle Wurzeln entweder real seyn; oder wenn sie imaginär sind, so werden sie von gerader Anzahl seyn, und die Summe der positiven wird der Summe der negativen gleich seyn. Denn insonderheit wenn in der Gleichung das 2te Glied vorhanden ist, das zum Coefficienten die Summe der Wurzeln hat, (§.99.) so müssen je 2 imaginäre Wurzeln, je mit 2 entgegengesezten Zeichen, einander aufheben, sonst wäre im 2ten Glied, wider die Voraussezung, eine imaginäre Grösse: wenn sie aber bey ungerader Anzahl einander aufhebten, so würde man nun in den folgenden Gliedern, in deren Coefficienten sie in ungerader Anzahl hineinkämen, wider die Voraussezung eine imaginäre Grösse haben. Hernach, wenn das 2te Glied fehlt, so kann es nicht anders fehlen, als es sey die Summe der positiven Wurzeln der Summe der negativen gleich, also auch es sey die Summe der imaginären positiven der Summe der negativen gleich. Eben diese Schlüsse gelten auch bey realen irrationalen Wurzeln.

Zusaz 12. Da nun die Anzahl der Wurzeln durch den Grad der Gleichung bestimmt wird; (§.99.) so haben Gleichungen von ungeradem Grade nothwendig wenigstens Eine reale Wurzel; aber Gleichungen von geradem Grade können lauter imaginäre haben.

§. 104.

Zusatz 13. Wenn man alle Zeichen der Wurzeln ändert, also daß man aus positiven negative, und aus negativen positive macht, so werden in der Gleichung selbst nur je über das andere Glied die Zeichen verändert. Denn es wird insonderheit die Summe aller Wurzeln, oder der Coefficient des 2ten Gliedes unverändert bleiben, aber das entgegengesezte Zeichen erhalten, da bey veränderten Zeichen aller Glieder nothwendig auch das Zeichen des Ganzen geändert werden muß. Hernach werden auch die Produkte aus allemal je 2, je 3 ꝛc. Wurzeln oder die Coefficienten der folgenden Glieder einerley bleiben; aber in den Produkten aus einer gleichen Anzahl Wurzeln wird das vorige Zeichen bleiben, in Produkten aus einer ungleichen Anzahl derselben wird es verändert werden: denn wenn bey einem Produkt das Zeichen zweyer Faktoren verändert wird, so wird das Zeichen des Produkts nicht geändert: wenn aber das Zeichen bey 3 Faktoren verändert wird, so bekommt das Produkt ein geändertes Zeichen; und überhaupt, ein geändertes Zeichen bey Faktoren von gerader Anzahl ändert das Zeichen des Produkts nicht; aber eine Aenderung bey einer ungeraden Anzahl ändert es: daher wird das Zeichen des 2ten Gliedes geändert, des dritten bleibt, des vierten wird geändert, des 5ten bleibt ꝛc.

Zusatz 14. So auch umgekehrt, wenn die Zeichen der abwechslenden Glieder, nemlich des 2ten, 4ten, 6ten ꝛc. verändert werden, so werden auch die Zeichen der Wurzeln verändert. Denn es ist besonders der Coefficient des 2ten Gliedes die Summe der positiven Wurzeln mit dem Zeichen —, und der negativen mit dem Zeichen +; daher werden bey Verän-

derung des Zeichens vom 2ten Glied auch die Zeichen der Wurzeln verändert. Hernach sind die Coefficienten des 4ten, 6ten, 8ten ꝛc. Gliedes Produkte aus einer ungeraden Anzahl von Wurzeln: wenn sie daher das Zeichen + haben, so sind sie entweder aus lauter negativen Wurzeln entstanden, oder aus einer geraden Anzahl von positiven und einer ungeraden von negativen; wenn sie aber das Zeichen — haben, so sind sie entweder aus lauter positiven Wurzeln entstanden, oder aus einer geraden Anzahl negativer und einer ungeraden positiver: es werden folglich die Zeichen der Wurzeln verändert, wenn die Zeichen dieser Glieder verändert werden.

Z. B. Die Wurzeln der Gleichung $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ sind 2, 4, und —3: ändert man aber die Zeichen der geraden Glieder, so wird die Gleichung daraus: $x^3 + 3x^2 - 10x - 24 = 0$, deren Wurzeln eben wieder die vorigen sind, aber mit veränderten Zeichen; nemlich —2, —4, und 3.

Eben so sind die Wurzeln der Gleichung $x^3 * - 7x + 6 = 0$ folgende: 1, 2, und —3; werden aber je der abwechslenden Glieder ihre Zeichen verändert, so kommt $x^3 * - 7x - 6 = 0$, (da wegen dem fehlenden 2ten Glied das Glied $-7x$ nicht das 2te, sondern das 3te Glied ist); deren Wurzeln sind —1, —2, und 3.

§. 105.

Zusaz 15. Aus Betrachtung der Coefficienten erhellet auch noch dieses: daß in jeder Gleichung die Auflösung einer Aufgabe enthalten ist, aus deren Bedingungen dergleichen Gleichung entstanden ist.

z. B. Die Gleichung $x^2 - 12x + 32 = 0$ enthält die Auflösung des Problems: 2 Zahlen zu finden, deren Summe $= 12$, und das Produkt $= 32$ sey.

Die Gleichung $x^3 - ax^2 - abx + abc = 0$ enthält die Auflösung dieses Problems: 3 Grössen zu finden, deren Summe $= a$ sey, und das Produkt aus je 2 derselben $= -ab$, und das Produkt aus allen 3en $= -abc$.

Die Gleichung $x^4 + abx^2 + a^2b^2 = 0$ enthält die Auflösung dieses Problems: 4 Grössen zu finden, deren Summe sowohl als Summe der Produkte aus je 3 derselben $= 0$; aber die Summe der Produkte aus je $2 = ab$ und das Produkt aus allen $4 = a^2b^2$ Und so auch in anderen Fällen.

§. 106.

Wenn eine gehörig geordnete Gleichung ohne Bruch ist, so ist keine reale und rationale Wurzel derselben ein eigentlicher Bruch. Denn ein eigentlicher Bruch, mit irgend einer anderen Grösse verbunden, kann im Coefficienten des 2ten Gliedes keine ganze Grösse hervorbringen, wo nicht auch diejenige, mit welcher er verbunden wird, ein Bruch von eben derselben Benennung ist, wie leicht erhellet. Es sey demnach irgend eine Gleichung $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2}$ ꝛc. $+ d = 0$. Man multiplicire sie mit der einfachen Gleichung $x + \frac{n}{r} = 0$, welche zur Wurzel einen eigentlichen Bruch hat; so ist zu erweisen, daß die daher entstehende Gleichung

$$x^{m+1} + \left.\begin{matrix} a \\ +\frac{n}{r} \end{matrix}\right\} x^m + \left.\begin{matrix} b \\ +\frac{an}{r} \end{matrix}\right\} x^{m-1} \text{ ꝛc. } + \frac{dn}{r} = 0$$

nicht ohne Bruch seyn könne.

Dazu,

Dazu, daß der Coefficient des 2ten Gliedes, $a + \frac{n}{r}$ eine ganze Grösse sey, wird erfordert, daß a eben diesen Nenner r habe, also daß a irgend einem Werth $\frac{p}{r}$ gleich sey, und es wird $\frac{an}{r} = \frac{pn}{r^2}$: daher, daß der Coefficient des 3ten Gliedes $b + \frac{an}{r} = b + \frac{pn}{r^2}$ eine ganze Grösse sey, wird erfordert, daß b den Nenner r^2 habe, oder irgend einer Grösse $\frac{q}{r^2}$ gleich sey: Gleichergestalt müßte der Coefficient des 4ten Gliedes den Nenner r^3 haben, des 5ten Gliedes r^4 ꝛc. und das lezte Glied d den Nenner r^m, daher müßte d irgend einer Größe $\frac{t}{r^m}$ gleich seyn, und also $\frac{dn}{r} = \frac{nt}{r^{m+1}}$ welche Grösse ein eigentlicher Bruch ist, da nach der Voraussezung $\frac{n}{r}$ dergleichen ist. Daher wenn Eine Wurzel ein wahrer Bruch wäre, so könnte die Gleichung selbst nicht ohne Bruch seyn; denn eben dadurch, daß man die Coefficienten also ordnete, daß in den vorhergehenden Gliedern ein Bruch vermieden würde, könnte er im lezten Glied nicht vermieden werden. Wenn folglich eine Gleichung keinen eigentlichen Bruch enthält, so wird auch keine rationale Wurzel von ihr ein eigentlicher Bruch seyn.

Anmerkung.

Was bisher von den Wurzeln der Gleichungen gesagt worden, wird im folgenden brauchbar seyn, da durch die sowohl positiv als negativ genommene

Divisoren des lezten Gliedes die Division der Glei-
chung versucht werden wird, daß ihre rationale Wurzeln entdeckt werden. Denn wenn eine gegebene Gleichung ohne eigentlichen Bruch ist, so erhellet schon, daß man die Division allein durch ganze Divisoren zu versuchen habe. Wenn nach Entdeckung einiger Wurzeln nach dem obigen bekannt wird, daß die übrigen imaginär seyen, so erhellet daß man weitere Divisionen unterlassen könne. Wenn eine Gleichung blos positive Wurzeln hat, so ist es überflüssig, die Divisionen durch negative Divisoren zu versuchen, und umgekehrt.

Das zweyte Kapitel.

Von einigen Transformationen der Gleichungen.

§. 107.

Es kann gar oft geschehen, daß eine Gleichung in derjenigen Form, wie sie vorgelegt wird, sehr beschwerlich aufzulösen ist: da hingegen alles viel leichter wird, wenn durch Anwendung einiger Aenderung die Gleichung gleichsam vorbereitet wird. Daher wollen wir die vornehmste Aenderungen, oder Transformationen, welche am öftesten gebraucht werden, hier anführen.

§. 108.

Eine gegebene Gleichung in eine andere zu transformiren, deren Wurzeln von den Wurzeln

der gegebenen Gleichung um eine gegebene Grösse unterschieden sind.

Auflösung.

1.) Es sey irgend eine Gleichung,

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0,$$

deren Wurzeln um die gegebene Grösse a vermehrt werden sollen. Es werde $y = x + a$, so ist $x = y - a$; wenn also in der vorgelegten Gleichung für x substituirt wird $y - a$, und für x^3 und x^2 gesezt wird $(y - a)^3$ und $(y - a)^2$, so erhält man die neue Gleichung:

$$y^3 \left.\begin{matrix}-3a\\-p\end{matrix}\right\} y^2 \left.\begin{matrix}+3a^2\\+2ap\\+q\end{matrix}\right\} y \left.\begin{matrix}-a^3\\-pa^2\\-qa\\-r\end{matrix}\right\} = 0$$

deren Wurzeln die Wurzeln der gegebenen Gleichung um die gegebene Grösse a übersteigen.

2.) Es sey eben diese Gleichung gegeben, es sollen ihre Wurzeln um die gegebene Grösse a vermindert werden. Es werde $y = x - a$, so ist $x = y + a$: wenn nun, wie oben, die gehörige Substitutionen geschehen, so erhält man:

$$y^3 \left.\begin{matrix}+3a\\-p\end{matrix}\right\} y^2 \left.\begin{matrix}+3a^2\\-2ap\\+q\end{matrix}\right\} y \left.\begin{matrix}+a^3\\-pa^2\\+qa\\-r\end{matrix}\right\} = 0$$

deren Wurzeln um die gegebene Grösse a geringer sind, als die Wurzeln der gegebenen Gleichung.

§. 109.

Zusatz 1. Wenn die gegebene Gleichung, ehe sie aufgelöst wird, solchergestalt in eine andere transformirt wird, und die Wurzeln dieser transformirten Gleichung gefunden werden, so muß jene gegebene Grösse von ihnen subtrahirt, oder zu ihnen addirt werden, um welche die Wurzeln der gegebenen Gleichung vermehrt oder vermindert worden; so erhält man die Wurzeln der vorgelegten Gleichung. Also im obigen ersten Fall muß von den gefundenen Wurzeln der transformirten Gleichung y^3 rc. die Grösse a abgezogen werden, hingegen im obigen 2ten Fall a addirt werden, damit man die Wurzeln der vorgelegten Gleichung $x^3 - px^2$ rc. erhalte.

Zusatz 2. Indem die Wurzeln der gegebenen Gleichung um eine gegebene Grösse vermehrt oder vermindert werden, so kommt zu ihren sowohl positiven als negativen Wurzeln im ersten Fall eine positive Grösse hinzu, im anderen eine negative. Daher ist klar, daß im ersten Fall alle ihre positive Wurzeln vermehrt und die negativen vermindert; im 2ten Falle aber alle positive vermindert und alle negative vermehrt werden.

Zusatz 3. Indem die Wurzeln durch eine Grösse, die einer negativen Wurzel gleich ist, vermehrt werden, oder auch um eine Grösse vermindert werden, die einer positiven Wurzel gleich ist, so wird diese Wurzel $= 0$, und die Gleichung wird um einen Grad herunter gebracht. (§. 102.)

Z. B. Wenn der Aequation $x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$ ihre Wurzeln 5, -2, -4, und -3 durch die Zahl 3 vermehrt werden, oder es wird $y = x + 3$ oder $x = y - 3$, so

so wird nach der Substitution aus obiger Gleichung folgende: $y^3 - 8y^2 - 8y + 8 = 0$, deren Wurzeln sind 8, 1, —1. Dieses wird eben so deutlich erhellen, wenn die Wurzeln der gegebenen Gleichung um die Zahl 5 vermindert werden.

Zusatz 4. In eben dem Fall kann es geschehen, daß alle negative Wurzeln in positive übergehen, wenn nemlich jene Grösse, um welche die Wurzeln vermehrt werden, die gröste negative Wurzel übersteiget; man wird dieses daran erkennen, wenn in der transformirten Gleichung die Zeichen + und — abwechslen. (§. 100.) Eben so kann es geschehen, daß alle positive Wurzeln in negative übergehen, wenn nemlich jene Grösse, um welche die Wurzeln vermindert werden, die gröste positive Wurzel übersteiget; man hat ein Anzeigen davon, wenn in der transformirten Gleichung die Zeichen + oder — fortsetzen. (§. 99.)

Zusatz 5. Ferner im ersten Fall ist klar, daß aus der grösten negativen Wurzel die kleinste positive werde, und im 2ten Fall aus der grösten positiven die kleinste negative: eben so, wenn im ersten Falle alle Wurzeln negativ wären, im 2ten alle positiv, daß in beyden Fällen aus der kleinsten Wurzel die gröste werde.

§ 110.

Aufgabe.

Eine gegebene Gleichung in eine andere zu verwandlen (transformiren), deren Wurzeln Ein Vielfaches (*Multiplum*) oder auch Theile (*Submultiplæ*) der Wurzeln der gegebenen Gleichung seyen.

Aufl.

Aufl. I.) Es sey irgend eine Gleichung

$$x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + rx^{m-3} \text{ ꝛc.} \ldots + t = 0$$

deren Wurzeln durch eine gegebene Grösse a multiplicirt werden sollen.

Man setze $y = ax$, so ist $x = \frac{y}{a}$ und dieses für x in der gegebenen Gleichung substituirt, gibt

$$\frac{y^m}{a^m} + \frac{py^{m-1}}{a^{m-1}} + \frac{qy^{m-2}}{a^{m-2}} + \frac{ry^{m-3}}{a^{m-3}} \text{ ꝛc.} \ldots t = 0$$

oder, alles mit a^m multiplicirt

$$y^m + apy^{m-1} + a^2qy^{m-2} + a^3ry^{m-3} \ldots a^mt = 0$$

welche Gleichung gänzlich einerley Coefficienten mit der gegebenen hat, 1, p, q, r... aber multiplicirt durch die Glieder der geometrischen Progression 1, a, a^2, $a^3 \ldots a^m$; und deren Wurzeln alle einerley mit jenen Wurzeln sind, aber durch a multiplicirt.

II.) Wenn die Wurzeln eben dieser Gleichung durch eine gegebene Grösse a dividirt werden sollen; oder multiplicirt durch $\frac{1}{a}$, so sezt man in voriger Operation $\frac{1}{a}$ anstatt a, so sind alle Coefficienten multiplicirt durch $\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}$ ꝛc. $\frac{1}{a^m}$ oder dividirt durch die correspondirende Glieder dieser geometrischen Progression 1, a, a^2, a^3 ꝛc. a^m

Zusatz

Zusaß 1. Wenn also alle einzelne Glieder der gegebenen Gleichung multiplicirt oder dividirt werden durch die correspondirende Glieder einer von 1 anfangenden geometrischen Progreſſion, ſo werden eben dadurch auch alle ihre Wurzeln durch das zweyte Glied jener geom. Progr. multiplicirt oder dividirt werden.

Z. B. Wenn die Glieder der Gleichung $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$, deren Wurzeln ſind -1, 1, und 3, mit der Progreſſion 1. 3. 9. 27 multiplicirt werden, ſo entſteht die Gleichung $x^3 - 9x^2 - 9x + 81 = 0$, deren Wurzeln eben dieſelben ſind, aber multiplicirt mit 3, nemlich -3, 3, und 9, wie es ſich zeigt, wenn man dieſe Werthe anſtatt x ſubſtituirt.

Wenn aber die Glieder dieſer 2ten Gleichung durch die correſpondirende Glieder eben derſelben Progreſſion dividirt werden, ſo kommt die Gleichung $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ wieder, deren Wurzeln eben dieſelben mit den Wurzeln von jener ſind, aber durch das zweyte Glied der Progreſſion, 3, dividirt.

Zuſaß 2. Es iſt leicht einzuſehen, daß die gefundene Wurzeln der transformirten Gleichung durch dieſe Gröſſe dividirt oder multiplicirt werden müſſen, durch welche die gegebene Wurzeln multiplicirt oder dividirt waren, damit man die gegebene Wurzeln erhalte. Alſo, nachdem im vorigen Beyſpiel die Wurzeln der transformirten Gleichung gefunden worden, -3, 3 und 9, ſo ſind dieſe durch 3 zu dividiren, daß man die Wurzeln der gegebenen Gleichung bekomme.

Zuſaß 3. Wenn in einer gegebenen Gleichung ein Glied fehlt, ſo darf die Ordnung der Glieder der geometriſchen Progreſſion nicht geſtört werden, ſondern die Glieder der Progreſſion, welche mit den fehlen=

lenden Gliedern der Gleichung correspondiren, werden ausgelassen.

Z. B. die Wurzeln der Aequation $x^3 - 7x + 6 = 0$ sollen multiplicirt werden mit 2. So schreibt man:

$$x^3 \; * \; -7x + 6 = 0$$
$$1,\; 2,\; 4,\; 8$$

und erhält die Gleichung

$$x^3 - 28x + 48 = 0$$

deren Wurzeln 2, 4, — 6 das Doppelte der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind 1, 2, — 3.

§. 111.

Aufgabe.

Aus einer gegebenen Gleichung die Brüche wegzuschaffen.

Aufl. Man multiplicire die Glieder der gegebenen Gleichung durch correspondirende Glieder einer geometrischen Progression, welche von 1 anfangt, und deren 2tes Glied das Produkt aus allen Nennern der Brüche ist. Es ist klar, daß alle also multiplicirte Coefficienten genau durch ihre Nenner dividirt werden können, und daß sich demnach die Brüche aufheben.

Z. B. Es sey die Gleichung

$$x^m + \frac{px^{m-1}}{a} + \frac{qx^{m-2}}{b} + \frac{rx^{m-3}}{c} \ldots\ldots + t = 0$$

von Brüchen zu befreyen.

Man nehme die geometrische Progression an:

$$1,\; abc,\; a^2b^2c^2,\; a^3b^3c^3 \ldots . a^m b^m c^m$$

so kommt nach geschehener Multiplication:

$$x^m + \frac{abcpx^{m-1}}{a} + \frac{a^2b^2c^2qx^{m-2}}{b} +$$
$$+ \frac{a^3b^3c^3rx^{m-3}}{c} \ldots + a^m b^m c^m t = 0$$

oder

$$x^m + bcpx^{m-1} + a^2bc^2qx^{m-2} +$$
$$+ a^3b^3c^2rx^{m-3} \ldots + a^m b^m c^m t = 0$$

werden nun die Wurzeln dieser Gleichung durch abc dividirt, so ergeben sich die Wurzeln der obigen Gleichung.

Z. B. Es sey die Gleichung:

$$x^3 + \tfrac{3}{4}x^2 - \tfrac{2}{5}x + 6 = 0$$

so nehme man die geometr. Progression:

1, 4.5, 4.4.5.5, 4.4.4.5.5.5

oder 1. 20. 400. 8000

so kommt nach geschehener Multiplication

$$x^3 + \frac{3.4.5.x^2}{4} - \frac{2.4.4.5.5.x}{5} +$$
$$+ 6.4.4.4.5.5.5 = 0$$

oder $x^3 + 15^2 - 160x + 48000 = 0$

deren Wurzeln durch 4.5 oder 20 dividirt, die Wurzeln der vorigen Gleichung geben.

Zusatz. Wenn die Nenner der wegzuschaffenden Brüche gemeinschaftliche Divisoren haben, so ist nicht nöthig, diese zu wiederholen, sondern es ist genug, wenn nur alle nicht gemeinschaftliche Faktoren zum 2ten Glied kommen, und die gemeinschaftliche nur einmal gesezt werden.

Z. B. Weil in der Gleichung

$$x^3 + \tfrac{3}{10}x^2 - \tfrac{7}{6}x + 8 = 0$$

ein gemeinschaftlicher Faktor bey den Nennern vorkommt, denn 10 = 2.5 und 6 = 2.3, so

darf

darf man diesen gemeinschaftlichen Divisor nur einmal setzen, und im 2ten Gliede der anzunehmenden Progression nur 2.5.3 für 2.5.2.3. Und es kommt, nach geschehener Multiplication:

$$x^3 + \frac{3.2.5.3}{2.5}\frac{x^2}{} - \frac{7.2.2.5}{2}\frac{5.3.3.x}{3} +$$

$$+ 8.2.2.2.5.5.5.3.3.3 = 0$$

$$x^3 + 9x^2 - 1050x + 216000 = 0.$$

deren Wurzeln durch 2.5.3 oder durch 30 dividirt, die Wurzeln der vorigen Gleichung geben.

§. 112.

Aufgabe.

Aus einer Gleichung das Irrationale, oder die Wurzelgrössen wegzuschaffen.

I. Auflösung.

Durch Division.

Es sey die Gleichung $x^3 - 5x + \sqrt{2} = 0$ vom Radicalzeichen zu befreyen.

Man setze $y = \frac{x}{\sqrt{2}}$, so ist $y\sqrt{2} = x$, und dieses in der vorigen Gleichung statt x substituirt, gibt

$$2y^3\sqrt{2} - 5y\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$$

und alles durch $\sqrt{2}$ dividirt

$$2y^3 - 5y + 1 = 0$$

Wenn nun die Wurzeln dieser Gleichung durch $\sqrt{2}$ multiplicirt werden, so erhält man die Wurzeln der gegebenen Gleichung.

II. Auf-

II. Auflösung.

Durch Multiplication oder Division der Glieder der Gleichung mit einer geometrischen Progression, die von 1 anfangt, und deren 2tes Glied eine von denen in der Gleichung vorkommenden Wurzelgrössen ist. Solchergestalt werden öfters Wurzelgrössen ausgeschafft, öfters Potenzen ergänzt, daß die Extraktion vor sich gehen kann.

Z. B. Es sey die Gleichung

$$x^3 + 4x^2\sqrt{2} - 6x - \frac{8}{\sqrt{2}} = 0$$

man multiplicire sie durch die Progression $1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}$ (neml. Glied mit Glied) so kommt

$$x^3 + 8x^2 - 12x - 16 = 0$$

oder man dividire sie damit, so kommt

$$x^3 + 4x^2 - 3x - 2 = 0$$

*) $x^3 - ax^2\sqrt[3]{2} + abx\sqrt[3]{32} - a^2b = 0$

man dividire die Glieder der Gleichung durch die correspondirende Glieder der geometr. Progression: $1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}, 2$, so kommt

$$x^3 - ax^2 + 2abx - \frac{a^2b}{2} = 0.$$

$$(\sqrt[3]{32} : \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8} = 2.)$$

III. Auflösung.

Durch Elevation zu eben der Potenz, welche der Exponent des Radicalzeichens anzeigt. Dieses aber findet nur in diesen Fällen statt:

1.) Wenn die Gleichung nur 2 Glieder hat, entweder beyde mit Radicalzeichen, oder eines radical, das andere rational.

2.) Wenn 2 Radicalglieder vorhanden sind, und so viele rationale, als nur wollen; wenn nur eines von den Radicalzeichen den Exponenten 2 hat.

3.) Wenn 3 Radicalglieder da sind, und so viele rationale als wollen; wenn nur alle Radicalzeichen den Exponenten 2 haben.

4.) Wenn 4 Radicalglieder da sind, mit dem Exponenten 2, ohne weitere Glieder.

Beyspiele.

1.) Es sey die Gleichung

$$a\sqrt[m]{x} - b\sqrt[n]{y} = 0, \text{ so ist}$$

$$a\sqrt[m]{x} = b\sqrt[n]{y}$$

nun elevire man beydes; zuerst zur Potenz m

$$a^m x = b^m \sqrt[n]{y^m}$$

hierauf zur Potenz n

$$a^{mn} x^n = b^{mn} y^m \text{ so ist}$$

$$a^{mn} x^n - b^{mn} y^m = 0.$$

2.) Es sey $a\sqrt[m]{x} - b\sqrt{y} + c = 0$ wo c die Summe aller rationalen Glieder ausdrückt, so kommt

$$a\sqrt[m]{x} = b\sqrt{y} - c$$

und beydes zur Potenz des Exponenten m erhoben, so wird die Zahl der Glieder im 2ten Theil m + 1, worinnen alle Potenzen des geraden Exponenten des Gliedes $b\sqrt{y}$ vom Wurzelzeichen frey seyn werden, und die Potenzen des ungeraden Exponenten werden die rationalen Grössen mit $\sqrt{y}$ multiplicirt enthalten.

Man

Man setze z. B. m = 5 und erhebe beyderseits zur 5ten Potenz, so kommt:

$$a^5x = b^5\sqrt{y^5} - 5b^4c\sqrt{y^4} + 10b^3c^2\sqrt{y^3} - 10b^2c^3\sqrt{y^2} + 5bc^4\sqrt{y} - c^5$$

oder

$$a^5x = b^5y^2\sqrt{y} - 5b^4cy^2 + 10b^3c^2y\sqrt{y} - 10b^2c^3y + 5bc^4\sqrt{y} - c^5$$

und, die Glieder versetzt, wo $\sqrt{y}$ ist, so kommt

$$a^5x + 5b^4cy^2 + 10b^2c^3y + c^5 = b^5y^2\sqrt{y} + 10b^3c^2y\sqrt{y} + 5bc^4\sqrt{y} = (b^5y^2 + 10b^3c^2y + 5bc^4)\sqrt{y}.$$

Wird endlich beydes ins Quadrat erhoben, so verschwindet die Irrationalität. Also verfährt man, der Exponent m mag bestimmt werden, wie er will.

3.) Es sey $a\sqrt{x} + b\sqrt{y} + c\sqrt{u} + d = 0$. Man lasse im ersten Theil der Gleichung nur 2 Radicalzeichen:

$$a\sqrt{x} + b\sqrt{y} = -c\sqrt{u} - d$$

und beydes erhebe man ins Quadrat

$$a^2x + 2ab\sqrt{xy} + b^2y = c^2u + 2cd\sqrt{u} + d^2$$

Uebrigens verfährt man wie im vorigen Beyspiel.

4.) Es sey $a\sqrt{x} + b\sqrt{y} + c\sqrt{z} + d\sqrt{u} = 0$

$$a\sqrt{x} + b\sqrt{y} = -c\sqrt{z} - d\sqrt{u}$$

und beydes ins Quadrat erhoben, gibt:

$$a^2x + 2ab\sqrt{xy} + b^2y = c^2z + 2cd\sqrt{uz} + d^2u$$

Uebrigens verfährt man abermal, wie im obigen 2ten Beyspiel.

IV. Auflösung.

In anderen Fällen bedienet man sich der allgemeinen Methode der Reduction der Gleichungen (§. 92.);

Nemlich jedes Glied, das eine Irrationalität mit sich bringt, setzet man einer gewissen anderen Grösse gleich, die durch einen neuen Buchstaben ausgedrückt wird; diesen substituirt man in der gegebenen Gleichung, und erhält dadurch eine neue, worinnen keine Wurzel-Ausdrücke sind. Ueberdieses hat man so viele neue Gleichungen, so viele neue Werthe man angenommen hat, in denen allen durch Erhebung zur Potenz, welche die Wurzelzeichen anzeigen, die Irrationalität wegfällt. Endlich können durch diese, und durch Hülfe der vorherigen Gleichung diese neuangenommene Werthe nach und nach hinweggeschafft werden, indem man die Anzahl der Gleichungen vermindert, bis endlich nur eine einzige Gleichung übrig ist, welche blos diejenige Grössen enthält, aus denen die vorgegebene Gleichung bestund.

Beyspiele.

1.) Es sey $\sqrt[3]{x} + \sqrt{y} - \sqrt[4]{u} - b = 0$ von der Irrationalität frey zu machen.

Man setze $\sqrt[3]{x} = p$, $\sqrt{y} = q$, $\sqrt[4]{u} = r$ so erhält man zuerst die Gleichung $p + q - r - b = 0$ und sodann noch folgende 4 Gleichungen:

$p + q = r + b$

die man in folgende verwandlen kann:

$p^3 = (r + b - q)^3$

$x = p^3$

$y = q^2$

$u = r^4$

Nun erhält man aus der ersten Gleichung $p^3 = (r + b - q)^3$ und der zweyten $x = p^3$ die neue Gleichung $x = (r + b - q)^3$ worinnen schon p weggeschafft ist. Mittelst dieser neuen, und der 3ten Gleichung kommt

q weg,

q weg, und man erhält eine neue Gleichung, woraus p und q weg sind. Endlich durch diese und die 4te Gleichung kann auch r weggeschafft werden, und man erhält eine Gleichung ohne Wurzelzeichen, und welche nur die Grössen enthält, die in der ersten gegebenen Gleichung vorhanden waren.

2.) Es sey $x - \sqrt[3]{ab^2} - \sqrt[3]{ad^2} = 0$

Man setze $\sqrt[3]{ab^2} = y$ und $\sqrt[3]{ad^2} = t$, so erhält man diese 3 Gleichungen:

$$x = y + t$$
$$y^3 = ab^2$$
$$t^3 = ad^2$$

Aus der ersten Gleichung wird $y = x - t$ und dieser Werth in der 2ten substituirt

$$x^3 - 3x^2t + 3xt^2 - t^3 = ab^2$$

für t^3 setze man ad^2

$$x^3 - 3x^2t + 3xt^2 - ad^2 = ab^2$$

$$t^2 = \frac{ad^2 + ab^2 - x^3 + 3x^2t}{3x}$$

mit t multiplicirt

$$t^3 = \frac{ad^2t + ab^2t - x^3t + 3x^2t^2}{3x}$$

für t^3 setze man ad^2

$$ad^2 = \frac{ad^2t + ab^2t - x^3t + 3x^2t^2}{3x}$$

daraus kommt

$$t^2 = \frac{3ad^2x - ad^2t + ab^2t + x^3t}{3x^2}$$

Man hat nun für t^2 zwey Gleichungen gefunden, welche man zusammensetzen kann, und wor-

worinnen nur t allein vorkommt; und man erhält endlich

$$t = \frac{x^4 + 2ad^2x - ab^2x}{ab^2 + ad^2 + 2x^3}$$

und diesen Werth in einer der vorhergehenden Gleichungen, z. B. in $x^3 - 3x^2t + 3xt^2 - ad^2 = ab^2$ substituirt, gibt eine Gleichung, die von Wurzelzeichen frey ist, und nur diejenige Grössen enthält, welche in der ersten gegebenen Gleichung vorhanden waren. Nemlich

$$\begin{aligned} x^9 - 3ad^2x^6 + 3a^2b^4x^3 - a^3b^6 = 0 \\ - 3ab^2x^6 - 21a^2b^2d^2x^3 - 3a^3b^4d^2 \\ + 3a^2d^4x^3 - 3a^3d^4b^2 \\ - a^3d^6. \end{aligned}$$

§. 113.

Aufgabe.

Eine Gleichung in eine andere zu verwandlen (transformiren), worinnen der lezte Terminus weniger Divisoren habe.

Aufl. Es sey irgend eine Gleichung

$$x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$$

solchergestalt zu transformiren.

Man setze nach und nach

$x = \pm 1$, $x = \pm 2$, $x = \pm 3$ u. s. w.

und nachdem man diese Werthe in der Gleichung substituirt hat, so beobachte man, in welchem Fall die Summe aller Glieder eine Zahl von wenigeren Faktoren gebe, als das lezte Glied der gegebenen Gleichung hat; sodann vermehre oder vermindere man die Wurzel

zel der gegebenen Gleichung mit dieser Zahl, woraus jene Summe erhalten worden ist.

Wenn man im gegenwärtigen Fall $x = 1$ sezt, so kommt die Gleichung $1 - 3 - 10 + + 24 = 12$. Daher, da die Zahl 12 weniger Faktoren hat, als 24, so vermindere man die Wurzeln der gegebenen Gleichung um 1, indem man $y = x - 1$ sezt; und es kommt:

$$y^3 - 13y + 12 = 0.$$

Zusatz. Zuweilen können zu Erreichung dieses Endzwecks die Glieder einer gegebenen Aequation durch correspondirende Glieder einer geometrischen Progression dividirt werden: und so oft diese Division ohne Bruch von statten geht, so oft erhält man das verlangte.

Z. B. Es sey $x^3 - 6x^2 - 4x + 24 = 0$ also zu transformiren. Da man ihre Glieder genau durch die Glieder der Progression 1, 2, 4, 8 dividiren kann, so kommt

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$$

wo die Wurzeln mit 2 multiplicirt, die Wurzeln der gegebenen Gleichung darstellen.

§. 114.

Aufgabe.

Aus einer gegebenen Gleichung ein beliebiges Glied wegzuschaffen.

Aufl. Es sey irgend eine gegebene Gleichung

$$x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + rx^{m-3} \ldots + t = 0$$

so hat man eine gewisse bekannte Grösse zu bestimmen, durch welche die Wurzeln derselben also vermehrt oder vermindert werden, daß das

verlangte Glied der Gleichung dadurch weggehoben werde.

Es sey diese Grösse $= n$, und $x = y + n$ Substituirt man nun für die Potenzen der Wurzel x die correspondirende Potenzen der Grösse $y + n$ so gehet jene Gleichung in folgende über:

$$y^m + mny^{m-1} + n^2\left(\frac{m^2 - m}{2}\right)y^{m-2} +$$

$$+ n^3\left(\frac{m^3 + 3m^2 + 2m}{6}\right)y^{m-3} \ldots + t = 0$$

$$+ py^{m-1} + pn(m-1)y^{m-2} +$$

$$+ pn^2\left(\frac{m^2 - 3m + 2}{2}\right)y^{m-3}$$

$$+ qy^{m-2} \quad + qn(m-2)y^{m-3}$$

$$+ ry^{m-3}$$

Soll nun das 2te Glied weggehoben werden, so ist sein Coefficient $nm + p = 0$

$$n = \frac{-p}{m}$$

Soll das 3te gehoben werden, so ist sein Coefficient

$$n^2 \frac{m^2 - m}{2} + pn(m-1) + q = 0$$

$$\text{oder } n^2 + \frac{2pn}{m} + \frac{2q}{m^2 - m} = 0$$

Soll das 4te gehoben werden, so ist sein Coefficient

$$n^3\left(\frac{m^3 - 3m^2 + 2m}{6}\right) + pn^2\left(\frac{m^2 - 3m + 2}{2}\right) +$$

$$+ qn(m-2) + r = 0$$

oder

oder $n^3 + \frac{3pn^2}{m} + \frac{6qn}{m^2 - m} + \frac{6r}{m^3 - 3m^2 + 2m} = 0$

und so fort.

Daher zu Bestimmung der Grösse n, wenn das 2te Glied zu heben ist, eine Gleichung des ersten Grades aufgelöst werden muß;

soll das 3te gehoben werden, so muß man eine Gleichung des zweyten Grades auflösen;

beym 4ten Glied eine Gleichung dritten Grades, und so fort;

überhaupt bey jedem besonderen Glied eine Gleichung von einem Grad, der um 1 geringer ist, als die Ordnungszahl, worinnen das Glied in der Gleichung stehet:

Da nun in einer jeden Aequation die Zahl aller Glieder durch die Anzahl der Dimensionen + 1 bestimmt wird (§. 98 Zus. 2.), so ist klar, daß, um das lezte Glied wegzuheben, eine Gleichung von eben dem Grade als die gegebene ist, aufzulösen sey; ja, die in nichts davon unterschieden ist. Denn um das lezte Glied zu heben, müssen die Wurzeln der Gleichung mit einer positiven Grösse vermehret werden, welche einer negativen Wurzel gleich ist; oder um eine Grösse vermindert werden, welche einer positiven Wurzel gleich ist. Damit aber diese Grösse bestimmt werde, so muß man die Wurzeln der gegebenen Gleichung suchen, und diese kann man nicht anders finden, als durch Auflösung der gegebenen Gleichung selbst, oder einer andern, die in nichts von ihr unterschieden ist.

Zusaß 1. Zu Hebung des 2ten Gliedes der Gleichung (welche Operation ungemein grossen Vortheil

 schafft,)

schafft.) haben wir gefunden: $n = \frac{-p}{m}$ daraus folget die allgemeine Regul: Man nehme eine neue unbekannte Grösse an, und setze zu ihr den Coefficienten des 2ten Gliedes dividirt durch den Exponenten des Grades der Gleichung mit dem entgegengesezten Zeichen von dem, das der Coefficient selbst hat: Bey geschehender Substitution wird sodann das 2te Glied verschwinden.

Z. B. Es sey das 2te Glied wegzuheben in der Gleichung

$x^3 - 12x^2 + 44 - 48 = 0$

Man dividire den Coefficienten des 2ten Gliedes durch den Exponenten 3, so kommt $-\frac{12}{3} = -4$. Man setze also $x = y + 4$, so kommt bey der Substitution die neue Gleichung $y^3 - 4y = 0$, worinnen das 2te Glied fehlt.

Zusaz 2. Wenn der Coefficient des 2ten Gliedes nicht genau durch den Exponenten des Grades der Gleichung dividirt werden kann, so muß man, um Brüche zu vermeiden, vorher die Glieder der Gleichung durch die correspondirende Glieder einer geometrischen Progression multipliciren, welche von 1 anfangt, und deren 2tes Glied eben dieser Exponent ist; so kann alsdenn genau dividirt werden. (§. 110. Zus. 1.)

Z. B. Es sey das 2te Glied wegzubringen in

$x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$

da 2 nicht genau durch 3 dividirt werden kann, so multiplicire man die Glieder der Gleichung durch die correspondirende Glieder der Progres-

sion

sion 1, 3, 9, 27, so kommt $x^3 - 6x^2 + 36x - 216 = 0$, wo nun 6 durch 3 dividirt werden kann. Man nimmt also $x = y + 2$, und erhält durch obige Substitution folgende Gleichung, da das 2te Glied fehlt.

$$y^3 + 24y - 160 = 0$$

Zusatz 3. Wenn der Coefficient des 2ten Gliedes theils positiv, theils negativ ist, wie in der Gleichung

$$\begin{aligned} x^2 - ax - ab &= 0 \\ + bx \quad & \end{aligned}$$

so ist einerley Verfahrungsart. Es sey

$x = y + \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$ so erhält man durch diese Substitution

$y^2 - \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}ab = 0$. wo das 2te Glied fehlt.

Zusatz 4. Weil das 2te Glied nur alsdenn fehlet, wenn die Summe der positiven Wurzeln der Summe der negativen gleich wird, so erhellet, daß das 2te Glied wieder hergestellt werde, wenn die Wurzeln einer Gleichung durch eine Grösse vermehrt oder vermindert werden. (§. 101. Zus. 6.)

Z. B. Es sey das 2te Glied herzustellen in der Gleichung

$$x^3 - 19x - 30 = 0$$

Man setze $y = x + 1$

so ist $x = y - 1$

daraus erhält man

$$y^3 - 3y^2 - 16y - 12 = 0$$

wo das 2te Glied vorhanden ist.

Das

Das dritte Kapitel.

Von Gleichungen, welche zwey oder mehrere gleiche Wurzeln haben.

§. 115.

Wenn man eine transformirte Gleichung betrachtet, welche entstehet, wenn man die Wurzeln irgend einer Gleichung um eine gegebene Grösse vermindert, so ergibt sich deutlich:

1.) Daß das lezte Glied der transformirten Gleichung eben dasselbe sey mit der gegebenen Gleichung, nur mit diesem Unterschied, daß es statt der unbekannten Grösse diejenige Grösse enthält, um die die Wurzeln der gegebenen Gleichung vermindert wurden.

2.) Daß der Coefficient des ohneinslezten Gliedes das Produkt aus den Theilen des lezten Gliedes, einzeln in die Exponenten multiplicirt, sey, welche jene gegebene Grösse darinnen hat, dividirt durch jene Grösse. Wo nemlich n mangelt, da wird verstanden, es sey mit $n^{\circ}=1$ multiplicirt.

3.) Daß der Coefficient des vorohneinslezten Gliedes das Produkt sey aus den Theilen des ohneinslezten Coefficienten einzeln in die Exponenten multiplicirt, welche jene Grösse darinnen hat, dividirt durch das Doppelte jener gegebenen Grösse.

4.) Daß überhaupt der Coefficient eines jeden vorhergehenden Gliedes nach eben dem Gesez entstehe, aus den Theilen des Coefficienten des fol-

folgenden Gliedes, indem man das Produkt durch ein Multiplum derjenigen Grösse dividirt, deren Multiplicität ihr Exponent ist die Zahl des Ortes, den jedes Glied vom lezten an rückwärts einnimmt.

Z. B. Die Wurzeln der Gleichung

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + t = 0$$

sollen um irgend eine gegebene Grösse n vermindert werden; Man seze $y = x - n$, oder $x = y + n$, so ist nach dieser Substitution die transformirte Gleichung

$$y^4 \left.\begin{array}{l}+4n\\+p\end{array}\right\} y^3 \left.\begin{array}{l}+6n^2\\+3pn\\+q\end{array}\right\} y^2 \left.\begin{array}{l}+4n^3\\+3pn^2\\+2qn\\+r\end{array}\right\} y \left.\begin{array}{l}+n^4\\+pn^3\\+qn^2\\+rn\\+t\end{array}\right\} = 0$$

deren leztes Glied genau die gegebene Aequation enthält, aber statt des unbekannten x die Grösse n hat: der Coefficient des ohneinslezten Gliedes kommt durch Multiplication eines jeden Theils des lezten Gliedes in den Exponenten seines n, und durch Division alles dessen durch n. Der Coefficient des vorohneinslezten Gliedes kommt durch Multiplication eines jeden Theils des Coefficienten des ohneinslezten Gliedes in den Exponenten seines n, und Division alles dessen durch 2n, und so fort.

Wenn daher die Wurzeln einer Gleichung um eine gegebene Grösse zu vermindern sind, so können die Glieder der neuen transformirten Gleichung durch diese Reguln leicht gefunden werden.

§. 116.

§. 116.

Wenn nun 2 Wurzeln einer Gleichung einander gleich sind, oder jener Grösse n gleich, durch deren Abzug von den Wurzeln die transformirte Gleichung hervorgebracht wird, so werden eben deswegen in der transformirten Gleichung 2 Werthe der Wurzel $y=0$ seyn, da $y=x-n$. Daher in der transformirten Gleichung beyde lezte Glieder fehlen werden. (§. 102.) Wenn 3 Wurzeln gleich sind, so werden 3 Werthe von $y=0$ seyn; und es werden die 3 lezte Glieder in der transformirten Gleichung fehlen. Und überhaupt, so viele Glieder werden am Ende fehlen, als gleiche Wurzeln in der gegebenen Gleichung sind.

Zusaz 1. Es können demnach alle Gleichungen, welche etliche gleiche Wurzeln haben, in andere von niedrigerem Grade transformirt werden, die mit ihnen eine oder mehrere Wurzeln gemein haben.

Zusaz 2. Und zwar wenn die Gleichung 2 gleiche Wurzeln hat, so kann sie auf den unmittelbar niedrigeren Grad deprimirt werden, also daß die neu entstehende Gleichung eine gemeine Wurzel mit der gegebenen hat.

Z. B. Wenn in der Gleichung $x^3+px^2+qx+r=0$ zwey gleiche Wurzeln sind, so wird in der transformirten Gleichung der Coefficient des ohneinslezten Gliedes $3n^2+2pn+q=0$ seyn. Nun aber ist nach der Voraussezung $x=n$, also $3x^2+2px+q=0$, welches eine Gleichung vom 2ten Grade ist, die eine gemeine Wurzel mit der gegebenen hat.

Eben so, wenn in der Gleichung x^4-px^3+ $+qx^2-rx+t=0$ zwey gleiche Wurzeln sind,

sind, so wird in der transformirten Gleichung der Coefficient des ohneinslezten Gliedes $4n^3 - 3pn^2 + 2qn - r = 0$ seyn; also, weil $x = n$ wird $4x^3 - 3px^2 + 2qx - r = 0$, welches eine Gleichung dritten Grades ist, die eine gemeine Wurzel mit der gegebenen hat.

§. 117.

Wenn man diese Gleichungen niedrigerer Grade, welche wir zum Erstenmal Hergeleitete (*Primo derivatæ*) nennen wollen, mit den gegebenen Gleichungen selbst vergleichet, so erhellet das Gesez der Herleitung leicht, ohne die Coefficienten der transformirten Gleichung zu Hülfe zu nehmen. Denn, betrachtet man das lezte Glied der gegebenen Gleichung als multiplicirt durch $x^0 = 1$, multipliciret die einzelne Glieder der gegebenen Gleichung mit den Exponenten, welche die unbekannte Grösse in derselben hat, und dividirt durch die unbekannte selbst, so erhält man solchergestalt die zum erstenmal hergeleitete Gleichungen (primo derivatas) wie aus obigen Beyspielen ersichtlich ist.

Wenn in irgend einer Gleichung $x^4 + px^3 + + qx^2 + rx + t = 0$ drey Wurzeln gleich sind, so wird in der transformirten Gleichung der Coefficient des vorohneinslezten Gliedes $6n^2 + 3pn + q = 0$ seyn (§. 116.); daher, weil $x = n$, so ist auch $6x^2 + 3px + q = 0$, wo eine gemeine Wurzel mit der gegebenen Gleichung vorhanden ist. Und weil diese Gleichung, welche wir zum andernmal hergeleitete (*secundo derivata*) nennen wollen, aus der zum erstenmal hergeleiteten des 3ten Grades hergeleitet wird, $4x^3 + 3px^2 + 2qx + r = 0$, indem man alle Glieder derselben mit den Exponenten multipli-

tiplicirt, welche in denselben die unbekannte Grösse x hat, und alles dividirt durch 2x; so haben diese zum ersten und anderenmal hergeleitete Gleichungen eine gemeine Wurzel; daher hat die zum erstenmal hergeleitete Gleichung zwey gemeine Wurzeln mit der gegebenen.

Ueberhaupt also, so viel auch gleiche Wurzeln in einer Gleichung seyn mögen, so werden diese alle, eine ausgenommen, in der zum erstenmal hergeleiteten Gleichung angetroffen, zwey ausgenommen in der zum zweytenmal hergeleiteten, drey ausgenommen in der zum 3tenmal hergeleiteten Gleichung (die aus der zum 2tenmal hergeleiteten nach eben dem Gesez hergeleitet wird) und so fort.

Man kann daher leicht eine von den gleichen Wurzeln einer gegebenen Gleichung finden. Denn wenn man aus ihr nach dem angezeigten Gesez so viele Gleichungen herleitet, so viel gleiche Wurzeln sind, und den gemeinschaftlichen Divisor der zulezt hergeleiteten Gleichung und der gegebenen sucht, (oder, welches leichter ist, der zum lezten und ohneinslezten mal hergeleiteten) so ist dieser gemeinschaftliche Divisor eine der gleichen Wurzeln.

§. 118.

Wenn man irgend eine Gleichung $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, welche 2 gleiche Wurzeln hat, mit den correspondirenden Gliedern irgend einer arithmetischen Progression $a + 3b$, $a + 2b$, $a + b$, a multiplicirt, so ist das Produkt $= 0$. Denn wenn die gegebene Gleichung mit a multiplicirt wird, so ist $ax^3 - apx^2 + aqx - ar = 0$, und die zum erstenmal hergeleitete Gleichung $3x^2 - 2px + q$ ist $= 0$, (§. 116) welche

welche demnach mit bx multiplicirt ebenfalls $=0$ ist, oder $3bx^3 - 2bpx^2 + bqx = 0$; daher ist auch die Summe dieser beyden Gleichungen $= 0$, oder $ax^3 + 3bx^3 - apx^2 - 2bpx^2 + aqx + bqx - ar = 0$. Welches würklich eben die gegebene Gleichung ist, multiplicirt mit den correspondirenden Gliedern der angezeigten arithmetischen Progreßion.

Zusaß 1. Wenn also eine Gleichung, welche 2 gleiche Wurzeln hat, solchergestalt mit irgend einer arithmetischen Progreßion multiplicirt wird, so entstehet eine neue Gleichung, welche eine gemeine Wurzel mit der gegebenen Gleichung hat; daher wenn dieser und der gegebenen Gleichung gemeinschaftlicher Divisor gefunden wird, so ist dieser eine von den gleichen Wurzeln.

Zusaß 2. Wenn die gegebene Gleichung mehrere gleiche Wurzeln hat, so muß man sie so oft, nur einmal weniger, mit den Gliedern der arithmetischen Progreßion multipliciren, so viel gleiche Wurzeln sind. Das übrige geschiehet wie vorhin.

Zusaß 3. Wenn man solchergestalt mehrere hergeleitete Gleichungen hat, so wird der gemeinschaftliche Divisor leichter unter den hergeleiteten Gleichungen gefunden: und indem er der zulezt hergeleiteten und der gegebenen Gleichung gemein ist, oder zum lezten oder ohneinsleztenmal hergeleiteten, so wird er selbst eine von den gleichen Wurzeln seyn, da die zulezt hergeleitete Gleichung nur eine gemeine Wurzel mit der gegebenen hat, oder mit den vorher hergeleiteten.

Zusaß 4. Wenn kein gemeinschaftlicher Divisor zu erhalten wäre, so ist es ein Anzeigen, daß die gleiche Wurzeln irrational seyen.

§. 119.

Beyspiele.

I.) Wenn die Gleichung $x^2 - 4x + 4 = 0$, welche 2 gleiche Wurzeln hat, mit den correspondirenden Gliedern der Progression 0, 1, 2, multiplicirt wird, so kommt $-4x + 8 = 0$ oder $-x + 2 = 0$, daher $x = 2$. Wird also die gegebene Gleichung durch $x - 2 = 0$ dividirt, so ist die andere Wurzel abermal $= x$. Eben diese Wurzel $x = 2$ würde sich ergeben, wenn die Multiplication durch irgend eine andere arithmetische Progression geschehen sollte. Z. B. sie geschehe durch 1, 2, 3, so kommt $x^2 - 8x + 12 = 0$, und $x^2 = 8x - 12$. Man multiplicire abermal mit 2, 1, 0, so kommt $2x^2 - 4x = 0$ oder $x^2 = 2x$; daher $8x - 12 = 2x$ und $6x = 12$ und $x = 2$.

II.) Die Gleichung $x^2 - 12x + 36 = 0$, welche 2 gleiche Wurzeln hat, werde mit den Gliedern der Progression 0, 1, 2, multiplicirt, so kommt $-12x + 72 = 0$, oder $-x + 6 = 0$, daher $x = 6$. Wenn also die gegebene Gleichung durch $x - 6 = 0$ dividirt wird, so findet man die andere Wurzel abermal $= 6$.

III.) Die Gleichung $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$, welche 2 gleiche Wurzeln hat, werde mit den Gliedern der Progression 3, 2, 1, 0 multiplicirt, so kommt $3x^3 - 10x^2 + 8x = 0$, oder $3x^2 - 10x + 8 = 0$ oder $x^2 - \frac{10x + 8}{3} = 0$, welche Gleichung eine der gleichen Wurzeln der gegebenen behält, und daher $x^2 = \frac{10x - 8}{3}$. Man multiplicire abermal

die

die Glieder der gegebenen Aequation in die correspondirende Glieder der Progression 0, 1, 2, 3, so entstehet eine andere Gleichung $-5x^2+16x-12=0$, oder $-x^2+\frac{16x-12}{5}=0$, welche ebenfalls eine der gleichen Wurzeln der gegebenen Gleichung behält; und daher $x^2=\frac{16x-12}{5}$; also $\frac{10x-8}{3}=\frac{16x-12}{5}$, also $2x=4$, und $x=2$, so die doppelte Wurzel der gegebenen Gleichung ist; wenn diese durch sie 2mal dividirt wird, so findet man die 3te ungleiche Wurzel derselben $x=1$.

IV.) Es sey die Gleichung $x^3-7x^2+16x-12=0$, welche 2 gleiche Wurzeln hat, man multiplicire sie mit den Gliedern der Progression 0, 1, 2, 3, so kommt $-7x^2+32x-36=0$, daher $x^2=\frac{32x-36}{7}$. Man multiplicire eben diese Gleichung mit den Gliedern der Progression 3, 2, 1, 0, so kommt $3x^3-14x^2+16x=0$, oder $3x^2-14x+16=0$, daher $x^2=\frac{14x-16}{3}$. Daher $\frac{32x-36}{7}=\frac{14x-16}{3}$, oder $96x-108=98x-112$, und daher $2x=4$ und $x=2$. Demnach, wenn die gegebene Gleichung 2mal durch $x-2$ dividirt wird, so erhält man die Wurzeln 2, 2, 3.

V.) Die Gleichung $x^4-9x^3+30x^2-44x+24=0$, welche 3 gleiche Wurzeln hat, werde mit den Gliedern der Progression 0, 1, 2, 3, 4, multiplicirt, so kommt $-9x^3+60x^2-132x+96=-x^3$

$-x^3 + \frac{60x^2 - 132x + 96}{9} = 0$; welche Gleichung zwey gemeine gleiche Wurzeln mit der gegebenen hat; Wenn man sie also neuerdings mit den Gliedern der Progression 0, 1, 2, 3, multiplicirt, das Produkt mit 9, und man dividirt mit 60, so kommt die zum andernmal hergeleitete Gleichung $x^2 - \frac{264x + 288}{60} = 0$, welche eine von den gleichen Wurzeln der gegebenen Gleichung behält, und daher $x^2 = \frac{264x - 2800}{60}$. Wiederum werde die obige zum erstenmal hergeleitete Gleichung multiplicirt mit den Gliedern der Progression 3, 2, 1, 0, so kommt $-3x^3 + \frac{120x^2 - 132x}{9} = 0$, oder $-3x^2 + \frac{120x - 132}{9} = 0$, welche Gleichung ebenfalls eine von den gleichen Wurzeln der gegebenen hat, und daher $x^2 = \frac{120x - 132}{27}$; nun setze man beyde Werthe von x^2 zusammen, so ist $\frac{264x - 288}{60} =$ $= \frac{120x - 132}{27}$ daraus wird $x = 2$ gefunden, als eine von den gleichen Wurzeln der gegebenen Gleichung; wenn daher die gegebene Gleichung 3mal durch $x - 2$ dividirt wird, so ergibt sich die unbekannte 4te ungleiche Wurzel, $x = 3$.

VI.) Wenn die Gleichung $x^4 - 5x^3 + 9x^2 - - 7x + 2 = 0$, welche 3 gleiche Wurzeln hat, multiplicirt wird mit den Gliedern der Progression 0, 1, 2, 3,

2, 3, 4, so kommt $-5x^3+18x^2-21x+8=0$, oder $-x^3+\frac{18x^2-21x+8}{5}=0$, welche zum erstenmal hergeleitete Gleichung zwey gleiche Wurzeln der gegebenen Gleichung enthält; wenn man daher diese wieder mit den Gliedern 0, 1, 2, 3 multiplicirt, so entstehet eine zum andernmal hergeleitete Gleichung $x^2-\frac{42x+24}{18}=0$, welche eine von den gleichen Wurzeln behält, und daher ist $x^2=\frac{42x+24}{18}$. Abermal multiplicire man die zuerst hergeleitete Gleichung mit den Gliedern der Progression 3, 2, 1, 0, so wird die zum 2tenmal hergeleitete Gleichung $-3x^3+$ $+\frac{36x^2-21x}{5}=0$. oder $-x^2+\frac{12x-7}{5}=0$, welche ebenfalls eine von beyden gleichen Wurzeln behält, daher ist $x^2=\frac{12x-7}{5}$. Wenn man also beyde gleiche Werthe von x^2 in eine Gleichung setzt, so ist $\frac{42x+24}{18}=\frac{12x-7}{5}$ und daraus findet sich $x=1$. Wenn also die gegebene Gleichung 3mal durch $x-1$ dividirt wird, so erhält man die 4te ungleiche Wurzel $x=2$.

VII.) Wenn die Gleichung $x^4 * -54x^2+$ $+216x-243=0$, welche 3 gleiche Wurzeln hat, multiplicirt wird mit den Gliedern der Progression 0, 1, 2, 3, 4, deren zweytes Glied ausgelassen werden muß, weil das zweyte Glied der gegebenen Gleichung fehlet, so entstehet die zum erstenmal hergeleitete Gleichung $-108x^2+648x-972=0$, oder

$-x^2 + \frac{648x - 972}{108} = 0$, welche zwey gleiche Wurzeln der gegebenen Gleichung behält, diese werde abermal mit den Gliedern der Progression multiplicirt 0, 1, 2, so entstehet die zum zweytenmal hergeleitete Gleichung $\frac{648x - 1944}{108} = 0$, welche eine von den gleichen Wurzeln der gegebenen hat, und es ist klar, daß es $x = 3$ ist. Wenn also die gegebene Gleichung dreymal durch $x - 3$ dividirt wird, so findet man die 4te ungleiche Wurzel, $x = 9$.

*) In dem lezten Beyspiel kommt wegen dem fehlenden 2ten Glied eine zum 2tenmal hergeleitete Gleichung nur von Einer Dimension, welche, da sie die einzige Wurzel hat, $x = 3$, sogleich zu erkennen gibt, es sey dieses die 3fache Wurzel der gegebenen Gleichung. Im 3ten, 4, 5 und 6ten Beyspiel wurde eine Aequation von Einer Dimension erhalten, indem man zwey hergeleitete unter sich verglichen. Aber wenn der Grad der Gleichung um mehr als 1 die Zahl der gleichen Wurzeln übersteiget, so kann man solchergestalt nicht zu einer Gleichung von Einer Dimension gelangen, sondern muß sodann den gemeinschaftlichen Divisor der beyden zulezt hergeleiteten Gleichungen suchen. Z. B. Wenn die Gleichung $x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6 = 0$, zwey gleiche Wurzeln hat, so multiplicire man ihre Glieder in die correspondirende der Progressionen 0, 1, 2, 3, 4, und 4, 3, 2, 1, 0. so entstehen zwey zum erstenmal hergeleitete Gleichungen $-7x^3 + 34x^2 - 51x + 24 = 0$, und $4x^3 + 21x^2 + 34x - 17 = 0$, aus denen noch andere

andere weitere nach dem nemlichen Gesez nicht hergeleitet werden können, da jede andere nur Eine von den gleichen Wurzeln der gegebenen Gleichung enthält. Daher muß man den gemeinschaftlichen Divisor dieser 2 hergeleiteten Gleichungen, $x - 1$, suchen, und $x = 1$ wird jene doppelte Wurzel der gegebenen Gleichung seyn, welche durch $x - 1$ zweymal dividirt, eine Gleichung 2ten Grades übrig läßt, $x^2 - 5x + 6 = 0$, deren Wurzeln sind 2 und 3: daher werden die Wurzeln der gegebenen Gleichung seyn 1, 1, 2, 3.

Das vierte Kapitel.

Von den Gränzen, zwischen denen die Wurzeln der Gleichungen enthalten sind.

§. 120.

Indem man die Wurzeln der Gleichungen nach den Methoden, welche unten erklärt werden sollen, aufzulösen im Begriff ist, so kann man öfters sich dadurch grosse Erleichterung verschaffen, wenn man gewisse Gränzen zu setzen weißt, zwischen welchen die Wurzeln einer gegebenen Gleichung eingeschlossen sind. Daher wollen wir hier einige Arten anzeigen, wie man solche Gränzen finden kann.

§. 121.

Aufgabe.

Die Gränzen der Wurzeln einer Gleichung zu finden, dadurch, daß man sie um eine gegebene Grösse vermehrt oder vermindert.

Auflösung. Es sey irgend eine Gleichung:

$$x^3 - px^2 - qx - r = 0.$$

Man vermehre oder vermindere ihre Wurzeln um die Grösse n; z. B. es werde $y = x - n$, oder $x = y + n$, so wird nach Substitution dieses Werths die transformirte Gleichung:

$$\left.\begin{matrix} y^3 + 3n \\ - p \end{matrix}\right\} y^2 \left.\begin{matrix} +3n^2 \\ -2pn \\ -q \end{matrix}\right\} y \left.\begin{matrix} +n^3 \\ -pn^2 \\ -qn \\ -r \end{matrix}\right\} = 0$$

Wenn nun in dieser transformirten Gleichung statt der Grösse n verschiedene Werthe nach und nach substituiret werden, und in dieser Aequation eine neue Wechslung der Zeichen oder eine neue Fortsetzung dazu kommt, so wird eine von ihren Wurzeln im ersten Fall aus einer negativen eine positive, im anderen aus einer positiven eine negative werden. (§. 100. Zusatz 3.) Daher muß zwischen 2 dergleichen Werthen n, unter deren Substitutionen sich eine solche Aenderung ereignet hat, im ersten Fall eine negative, im 2ten eine positive Wurzel stehen, welche nemlich durch Substitution eines Werths von n nicht aufgehoben worden ist, und bey Substitution des anderen aufgehoben wird, und das Zeichen ändert.

Z. B. Es sey die Gleichung

$$x^3 - 2x^2 - x + 6 = 0,$$

welche 2 Abwechslungen der Zeichen hat, und eine

eine Fortsetzung. Es werde $y = x + 2$ oder $x = y - 2$. Nach geschehener Substitution wird die transformirte Gleichung

$$y^3 - 4y^2 + 3y + 8 = 0$$

ebenfalls 2 Wechslungen und eine Fortsetzung der Zeichen haben. Aber wenn man sezt $y = x + 4$ oder $x = y - 4$, so wird nach geschehener Substitution die transformirte Gleichung

$$y^3 - 10y^2 + 31y - 22 = 0$$

drey Wechslungen der Zeichen haben. Demnach ist eine negative Wurzel in eine positive übergegangen, welche folglich, wenn sie anders real ist, zwischen -2 und -4 enthalten seyn muß, da sie durch Vermehrung der Wurzeln um 2 nicht, wohl aber durch Vermehrung um 4 aufgehoben worden, und das Zeichen verändert. Und wirklich wird sich auch bey der Substitution zeigen, daß diese Wurzel $= -3$ sey.

§. 122.

Zusaz. Wenn die Grösse, wodurch die Wurzeln der gegebenen Gleichung vermehrt werden, eine Aenderung aller Zeichen verursacht, so wird sie alle Wurzeln positiv machen, also die gröste negative Wurzel übersteigen, und wird die Gränze der negativen Wurzeln seyn. Wenn aber die Grösse, wodurch die Wurzeln vermindert werden, eine Fortsetzung aller Zeichen zuwegenbringt, so wird sie alle Wurzeln negativ machen, also die gröste positive Wurzel übersteigen, und wird die Gränze der positiven Wurzeln seyn.

Z. B. Wenn die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - 2x^2 - 5x - 6 = 0$$

durch die Zahl 4 vermehrt werden, indem man sezt $y=x+4$, oder $x=y-4$, so werden in der transformirten Gleichung alle Zeichen verändert werden; aber wenn sie durch eben diese Zahl 4 vermindert wird, indem man sezt $y=x-4$, oder $x=y+4$, so werden alle Zeichen fortgesezt werden. Folglich übersteiget die Zahl 4 die gröste positive Wurzel, und -4 die gröste negative. Und es sind auch die Wurzeln der gegebenen Gleichung -1, 2, -3, wie sich leicht durch die Substitution zeigt.

§. 123.

Aufgabe.

Die Gränzen der Wurzeln einer Gleichung durch blosse Versetzung der Glieder zu finden.

Aufl. Man mache die negative Glieder einer Gleichung durch Versetzung positiv. Wenn sodann ein Theil aus einem einigen Glied bestehet, welches das unbekannte enthält, der andere Theil aber aus mehreren, davon das eine eine höhere Potenz als das unbekannte hat, ein anderes Glied aber eine niedrigere (wo man unter die Potenzen auch $x^0 = 1$ rechnet, oder ein Glied, darinnen x nicht ist), so lasse man in dem Theil, der mehrere Glieder enthält, alle übrige weg, bis auf eines, das zuerst die höhere Potenz des unbekannten hat, sodann auch die niedrigere; so wird eben dadurch offenbar dieser Theil der Gleichung kleiner als der andere seyn, und durch Division mit der unbekannten, so oft es angehet, wird im ersten Fall eine Potenz des unbekannten übrig bleiben, die kleiner ist, als die bekannte Grösse, im anderen Fall aber

aber eine bekannte Grösse, die kleiner ist, als die Potenz der unbekannten; daher beyderseitige Gränzen, sowohl die übersteigende als die engere leicht heraus zu bringen sind.

Z. B. Man suche die Gränzen der Wurzeln der Gleichung

$$x^5 + 2x^4 - 10x^3 + 2x^2 + 4 = 0$$

so ist durch Versetzung

$$x^5 + 2x^4 + 2x^2 + 4 = 10x^3$$

da nun der 2te Theil nur Ein Glied hat, das die unbekannte Grösse enthält, und darinnen die Potenz des unbekannten niedriger ist, als in beyden ersten Gliedern des ersten Theils, und höher als in beyden lezten; so läßt man alle übrige Glieder weg, und es ist

$$x^5 < 10x^3 \text{ oder } x^2 < 10 \text{ oder } x < \sqrt{10}$$
$$\text{oder } x < 3,2.$$

es steckt nemlich $\sqrt{10}$ zwischen $\sqrt{3,1}$ und $\sqrt{3,2}$, daher nehme man das zweyte an, daß man gewiß seyn kann, es sey $x < \sqrt{3,2}$; welches wir auch künftighin solchergestalt beobachten wollen.

Ferner, wenn allein das 2te Glied des ersten Theils beybehalten wird, so ist:

$$2x^4 < 10x^3 \text{ oder } x < 5$$

welche Gränze entfernter ist, als die vorige.

Behält man allein das 3te Glied, so ist

$$2x^2 < 10x^3 \text{ oder } 2 < 10x \text{ oder } \tfrac{1}{5} < x$$
$$\text{oder } x > \tfrac{1}{5} \text{ oder } x > 0,2.$$

Behält man allein das 4te Glied, so ist

$$4 < 10x^3 \text{ oder } x^3 > \tfrac{4}{10} \text{ oder } x > \sqrt[3]{0,4},$$
$$\text{oder } x > 0,7$$

welche Gränze näher als die vorige ist.

Die

Die positiven Wurzeln der gegebenen Aequation sind demnach zwischen den Gränzen 0, 7 und 3, 2.

§. 124ᵃ.

Zusatz 1. Es sey die Gleichung von dieser Art:

$$x^5 - 2x^4 - 10x^3 - 2x^2 - 4 = 0$$

man suchet die Gränzen der negativen Wurzeln. So sind die Zeichen der wechselsweise folgenden Glieder zu verändern, und es kommt eine Gleichung, deren positive Wurzeln zwischen den Gränzen 0, 7 und 3, 2 sind; also werden die negativen Wurzeln der gegebenen Gleichung zwischen — 0, 7 und — 3, 2 enthalten seyn; welches immer geschehen muß, wenn man die Gränzen von negativen Wurzeln sucht.

Zusatz 2. Wenn nach geschehener Versetzung in einem Theil ein einziges Glied ist, welches die kleinste Potenz des unbekannten enthält, oder die gröste von allen, welche im anderen Theil sind, so wird allemal im ersten Fall eine niedrigere Gränze (Limes deficiens) im anderen eine höhere oder übersteigende Gränze (Limes excedens) der positiven Wurzeln gefunden.

Z. B. Man sucht die Gränzen der Wurzeln der Gleichung

$x^5 + 3x^3 + 2x^2 - 64 = 0$, so kommt durch Versetzung:

$x^5 + 3x^3 + 2x^2 = 64$, daher ist

$2x^2 < 64$ oder $x^2 < 32$ oder $x < \sqrt{32}$ oder $x < 5, 7$.

Behält man aber blos das 2te Glied, so ist

$3x^3 < 64$ oder $x^3 < 21, 4$ oder $x < \sqrt[3]{21, 4}$ oder $x < 2, 8$.

Be=

Behält man allein das erste Glied, so ist

$x^5 < 64$ oder $x < \sqrt[5]{64}$ oder $x < 2,3$, welche Gränze unter allen die nächste ist, da sie die kleinste ist.

Wäre aber die Gleichung gegeben:

$x^5 - x^4 - 2x^3 - 243 = 0$, so ist

$x^5 = x^4 + 2x^3 + 243$

daher $x^5 > x^4$ oder $x > 1$

Ferner $x^5 > 2x^3$ oder $x^2 > 2$ oder $x > \sqrt{2}$ oder $x > 1,4$.

Ferner $x^5 > 243$ oder $x > \sqrt[5]{243}$ oder $x > 3$ welche Gränze unter allen die nächste ist, da sie die gröste ist.

Zusatz 3. Wenn man die übersteigende Gränze (Limitem excedentem) gefunden hat, so werden die Glieder des Theils, der die höhere Potenzen des unbekannten enthält, durch die unbekannte, x, dividirt, und das Glied im anderen Theil, das das unbekannte nicht enthält, wird durch die gefundene Gränze dividirt; so wird der Theil, so das unbekannte enthält, nun kleiner als der andere, und hat überdieses ein bekanntes Glied; wird dieses nun beyderseits weggenommen, und die Division wiederholt, so kann man zuweilen auf ein einziges Glied gelangen, so das unbekannte x enthält, grösser als das bekannte, und also kann auch die niedrigere Gränze (Limes deficiens) gefunden werden.

Z. B. In der Gleichung $x^5 + 3x^3 + 2x^2 - 64 = 0$ wurde die übersteigende oder höhere Gränze (Limes excedens) oben gefunden $= 2,3$. Wenn nun nach geschehener Versetzung der erste Theil der Gleichung durch x^2 dividirt wird, und der andere durch $(2,3)^2$

so

so kommt $x^3+3x+2>12$ oder $x^3+3x>10$. Man dividire abermal den ersten Theil durch x, und den 2ten durch 2, 3; so kommt $x^2+3>4,3$ oder $x^2>1,3$ oder $x>\sqrt{1,3}$ oder $x>1,1$. Die Werthe der positiven Wurzel sind demnach zwischen 1, 1 und 2, 3.

Daraus erhellet nun leicht, wie die Gränzen in den Gleichungen des 2ten, 3ten und 4ten Grades gefunden werden.

§. 124[b].

Beyspiele.

*) Es sey $x^2+px-q=0$.

so ist $x^2+px=q$

folglich $px<q$

und $x<\frac{q}{p}$

Ferner: $q>x^2$

$\sqrt{q}>x$

folgl. $x\sqrt{q}>x^2$

und $x\sqrt{q}+px>x^2+px$

oder $x\sqrt{q}+px>q$

folglich $x>\frac{q}{p+\sqrt{q}}$

Es ist also Eine Wurzel der gegebenen Gleichung zwischen den Schranken $\frac{q}{p}$ und $\frac{q}{p+\sqrt{q}}$ enthalten.

Z. B. Es sey $x^2+4x-12=0$

so ist $\frac{q}{p}=\frac{12}{4}=3$ und

$\frac{q}{p+\sqrt{q}}=\frac{12}{4+3}$ beynahe, $=\frac{12}{7}=1\frac{5}{7}$

daher

daher ist Eine Wurzel zwischen 3 und $1\frac{5}{7}$; und gewiß ist Eine Wurzel $= 2$, worauf die andere, $= -6$ durch Division der Gleichung durch $x - 2$ leicht gefunden wird.

*) Es sey $x^2 - px + q = 0$
so ist $x^2 + q = px$
folglich $x^2 < px$
$x < p$
Ferner $px > q$
$x > \frac{q}{p}$

Es ist also Eine Wurzel zwischen p und $\frac{q}{p}$

Z. B. Es sey $x^2 - 3x + 3 = 0$
$x^2 + 3 = 3x$
und es ist $p = 3$, $\frac{q}{p} = \frac{3}{3} = 1$.
Also ist Eine Wurzel zwischen 3 und 1.

*) Es sey $x^2 - px - q = 0$
so ist $x^2 = px + q$
folglich $x^2 > q$
$x > \sqrt{q}$
und auch $x\sqrt{q} > q$
es war aber $x^2 = px + q$
folglich setze man $x\sqrt{q}$ für q
so ist $x^2 < px + x\sqrt{q}$
oder $x < p + \sqrt{q}$
Ferner: $x^2 > px$
folgl. $x > p$
und $px > p^2$
es war aber $x^2 = px + q$

folgl.

folgl. setze man p^2 für px

so ist $x^2 > p^2 + q$ und $x > \sqrt{(p^2 + q)}$

Und Eine der Wurzeln ist folglich zwischen $p + \sqrt{q}$ und $\sqrt{(p^2 + q)}$

Z. B. Es sey $x^2 - 3x - 4 = 0$

so ist beynahe $\sqrt{(p^2 + q)} = \sqrt{13} = 3\ldots$

und $p + \sqrt{q} = 3 + 2 = 5$;

Daher ist Eine Wurzel zwischen 3 und 5.

*) Es sey $x^3 - qx + r = 0$

so ist $x^3 = qx - r$

folglich $x^3 < qx$

und $x < \sqrt{q}$

Ferner: $x^3 + r = qx$

folgl. $qx > r$

und $x > \frac{r}{q}$

Demnach ist Eine Wurzel zwischen den Grän- zen $\sqrt{q}$ und $\frac{r}{q}$.

Z. B. Es sey $x^3 - 19x + 30 = 0$

so ist $\sqrt{q} = \sqrt{19} = 4\ldots$ beynahe.

und $\frac{r}{q} = \frac{30}{19} = 1\frac{1}{2}$ ungefehr.

Daher ist Eine der Wurzeln zwischen 4 und $1\frac{1}{2}$.

*) Es sey $x^3 - px - q = 0$

so ist $x^3 - px = q$

Folglich $x^2 - p < q$

oder, wenn man p beyderseits addirt,

$x^2 < p + q$

und $x < \sqrt{(p + q)}$

Ferner: $x^3 > q$

folgl. $x > \sqrt[3]{q}$

Dem-

Demnach ist Eine der Wurzeln zwischen den Gränzen $\sqrt{(p+q)}$ und $\sqrt[3]{q}$ enthalten.

Z. B. Es sey $x^3 - 12x - 12 = 0$

so ist $\sqrt{(p+q)} = \sqrt{24} = 4 \ldots$

und $\sqrt[3]{q} = \sqrt[3]{12} = 2 \ldots$

Daher ist Eine Wurzel zwischen 4 und 2.

*) Es sey $x^3 + qx - r = 0$

so ist $x^3 + qx = r$

daher $qx < r$

$$x < \frac{r}{q}$$

Ferner: $x^3 < r$

und $x < \sqrt[3]{r}$

daher auch $x^2 < \sqrt[3]{r^2}$

und $x^3 < x\sqrt[3]{r^2}$

substituirt man nun in der gegebenen Gleichung diesen Werth für x^3, so ist

$$x\sqrt[3]{r^2} + qx > r$$

folglich $x > \frac{r}{q + \sqrt[3]{r^2}}$

*) Es sey $x^4 - px^2 - qx - r = 0$

so ist $x^4 - px^2 = qx + r$

folgl. $x^4 > px^2$

$x^2 > p$ und $x > \sqrt{p}$.

Ferner: $x^4 - px^2 - qx = r$

Folgl. wenn das erste Glied durch x dividirt wird,

$x^3 - px - q < r$

oder $x^3 - px < r + q$
und noch vielmehr $x^2 - p < r + q$
folgl. $x^2 < r + q + p$
demnach $x < \sqrt{(r + q + p)}$.

§. 125.

Aufgabe.

Die Gränzen der Wurzeln einer Gleichung durch Hülfe der hergeleiteten Gleichungen aus derselben zu finden.

Aufl. Aus der gegebenen Gleichung derivire man eine zum erstenmal hergeleitete Gleichung, wie oben §. 117. gelehret worden, aus dieser wieder eine andere zum zweytenmal hergeleitete, und fahre nach diesem Gesez der Herleitung fort, bis man auf eine zum leztenmale hergeleitete einfache Gleichung kommt. Die solchergestalt hergeleitete Gleichungen werden die Gränzen geben, zwischen denen sowohl die positive als negative Wurzeln der gegebenen Gleichung enthalten sind. Denn eine positive Zahl, die in der gegebenen Gleichung statt der unbekanuten Grösse gesezt wird, und sowohl hier als in allen hergeleiteten Gleichungen überall eine positive Summe gibt, ist grösser als jede positive Wurzel der gegebenen Gleichung, also ist sie die Gränze der positiven Wurzeln; aber eine negative Zahl, die statt der unbekannten gesezt, eine positive Summe in Gleichungen von gerader Dimension gibt, eine negative Summe aber in Gleichungen von ungerader Dimension, ist grösser, als jede negative Wurzel, und daher die Gränze der negativen Wurzeln.

Be-

Beweis. Die gegebene Gleichung ist das lezte Glied, und die hergeleitete Gleichungen sind die Coefficienten der transformirten Gleichung, worein die gegebene Gleichung verwandelt wird, wenn ihre Wurzeln um eine unbestimmte Grösse n vermindert werden (§. 115.). Blos mit diesem Unterschied, daß in diesen die unbekannte Grösse so viel Werth hat, als in jenen die undeterminirte n. Wenn also in diesen für die unbekannte Grösse eine dergleichen positive Zahl angenommen wird, daß alle Aequationen eine positive Summe geben, so werden in jener transformirten alle Glieder positiv seyn, also alle Wurzeln negativ. (§. 100. Zusatz 2.) Daher ist jene undeterminirte Grösse n, welche hier für die unbekannte gesezt wird, von solcher Beschaffenheit, daß sie, wenn man die Wurzeln um sie vermindert, sie alle negativ macht, daß sie demnach jede positive Wurzel übersteiget. Im 2ten Fall werden wegen Abwechslung der Zeichen in jener transformirten Gleichung alle Wurzeln positiv, also ist jene negative Zahl n, um welche die Wurzeln vermindert werden, von der Beschaffenheit, daß sie alle Wurzeln positiv macht, daß sie daher jede negative Wurzel übersteiget.

Zusatz. Man kann auch die Gränze der negativen Wurzeln also ausforschen, wie der positiven, nemlich durch wechselsweises Abändern der Zeichen, und also durch Verwandlung der negativen Wurzeln in positive.

§. 126.

Beyspiele.

I.) Es sey die Gleichung

$$x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$$

Man solle die übersteigende Gränzen der Wurzeln finden. Man mache, wie gewöhnlich, Herleitungen; so erhält man folgende Formuln:

$$x^3 - x^2 - 14x + 24$$
$$3x^2 - 2x - 14$$
$$3x - 1.$$

Wird nun statt x überall gesezt 1, oder 2, oder 3, so wird die Summe nicht überall positiv; aber wenn man 4 sezt, so ist die Summe der Glieder in der ersten = 16, in der 2ten = 26, in der dritten = 11. Also übersteiget die Zahl 4 jede positive Wurzel. Und eine der positiven Wurzeln wird = 3, die andere = 2 seyn.

Um die Gränze der negativen Wurzel zu suchen, würde man vergeblich für x die Zahlen —1, —2, —3 setzen; nimmt man aber —5, so ist die Summe der Glieder in der ersten Formul = —56, in der 2ten = 71, in der 3ten = —16, also übersteiget —5 die negative Wurzel, welche würklich = —4 ist. Wenn für x die Zahl —4 angenommen worden wäre, so wäre zur Summe in der ersten Formul, oder in der gegebenen Gleichung selbst, o gekommen, woher sogleich erhellet hätte, die negative Wurzel sey = —4. (§. 93.)

II.) Es sey die Gleichung

$$x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = 0$$

Man solle die übersteigende Gränzen ihrer Wurzeln finden. Nach geschehenen Herleitungen hat man folgende Formuln:

$$x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120$$
$$5x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 60x + 63$$
$$10x^3 - 12x^2 - 30x + 30$$
$$10x^2 - 8x - 10$$
$$5x - 2$$

Wird nun statt x überall gesezt 2, so ist die Summe überall positiv, nemlich in der ersten $= 46$, in der zwenten $= 79$, in der dritten $= 2$, in der vierten $= 14$, in der fünften $= 8$: also übersteiget die Zahl 2 jede positive Wurzel.

Die Gränze der negativen Wurzeln zu finden, hätte man vergeblich für x die Zahl -1 oder -2 angenommen; aber nimmt man -3, so wird die Summe in den Formuln von ungerader Dimension negativ, in den Formuln von gerader Dimension positiv: also übersteiget -3 jede negative Wurzel.

III.) Es sey die Gleichung $x^5 - x^4 - 7x^3 + x^2 + 4x - 4$, so kommen nach geschehenen Herleitungen die Formuln:

$$x^5 - x^4 - 7x^3 + x^2 + 4x - 4$$
$$5x^4 - 4x^3 - 21x^2 + 2x + 4$$
$$10x^3 - 6x^2 - 21x + 1$$
$$10x^3 - 4x - 7$$
$$5x - 1$$

Würde nun statt x überall gesezt 1, oder 2, oder 3, so käme nicht überall eine positive Summe; sie kommt aber, wenn man statt x sezt 4: also übersteiget die Zahl 4 jede positive Wurzel.

Um die Gränze der negativen Wurzeln zu finden, wollen wir die Zeichen der Glieder wechselsweise verändern. (§. 125.) Nach geschehenen Herleitungen kommen also die Formeln:

$$x^5 + x^4 - 7x^3 - x^2 + 4x + 4$$
$$5x^4 + 4x^3 - 21x^2 - 2x + 4$$
$$10x^3 + 6x^2 - 21x - 1$$
$$10x^2 + 4x - 7$$
$$5x + 1$$

Sezt man nun für x die Zahl 2, so wird die erste Formul, oder die Gleichung selbst, $=0$; in den übrigen ist die Summe überall positiv: also -2 ist die negative Wurzel der Aequation, und übersteiget zugleich alle übrige negative Wurzeln.

§. 127.

Aufgabe.

Die Gränzen der Wurzeln einer Gleichung durch Hülfe mittlerer arithmetischer Proportionalzahlen zu finden.

Aufl. In der gegebenen Gleichung substituire man statt der unbekannten Grösse nach und nach allerley Werthe, so wird man auf eine Substitution kommen, wobey ein positiver Werth für die Gleichung herauskommen wird, und eben so auch auf eine andere, wobey ein negativer Werth kommen wird. Weil aber, wie im folgenden erhellen wird, bey diesem Uebergang vom positiven Werth zum negativen die Aequation durch o passiren muß, so wird zwischen jenen beyden für das Unbekannte angenommenen Werthen eine Wurzel der Gleichung stecken, auf die jener Werth $=0$ gehet. Man setze sodann für das Unbekannte die mittlere arithmetische Proportionalzahl unter vorigen beyden angenommenen, so wird man auf einen Werth der Gleichung kommen, dessen Zeichen nothwendig mit dem Zeichen eines der vorigen gefundenen Werthe übereinstimmen, dem andern

dern Zeichen aber entgegen gesezt seyn wird. Abermal setze man für das Unbekannte eine mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen dem zulezt gesezten Werth, und demjenigen unter den vorigen, der einen Werth der Gleichung gab, mit einem Zeichen das dem Zeichen des von ihm gegebenen Werths entgegen war. Endlich nehme man nach eben der Methode immer einen mittleren Werth zwischen dem zulezt angenommenen, und dem vorhergehenden, aus dem der Werth der Gleichung von entgegengesezten Zeichen hergeflossen ist. Diese angenommene Werthe werden sich einander immer mehr nähern, also auch der zwischen ihnen enthaltenen Wurzel, deren Gränzen man demnach durch dieses Verfahren nach Belieben verengern kann.

Z. B. Man sucht die Gränzen der Wurzel der Gleichung:

$$x^3 - 30x + 36 = 0$$

sezt man $x = 3$, so wird die Gleichung $= - 27$.
sezt man $x = 7$, so wird die Gleichung $= 169$.

Es stecket also eine Wurzel zwischen 3 und 7, zu deren man sich auf folgende Art nähern kann:

A=3	—27	A=3	—27	D=4	—20
C=5	11	D=4	—20	E=4,5	—7,875
B=7	169	C=5	11	C=5	11

E=4,5	—7,875	F=4,7	—1,177	F=4,7
F=4,7	—1,177	G=4,8	2,592	H=4,75
C=5	11	C=5	11	G=4,8

Da aus den Werthen A und B Werthe der Gleichung von verschiedenen Zeichen herausgebracht worden, nemlich —27 und 169, so nehme man zwischen A und B einen arithmetisch mittleren Werth

C = 5, so erhält man den positiven Werth der Gleichung = 11. Man nehme also zwischen A und C einen mittleren D, so kommt ein negativer Werth — 20. Ferner nehme man also zwischen D und C den mittleren E, so kommt der negative Werth — 7,875, demnach weiter zwischen E und C den mittleren F, zwischen F und C den mittleren G und so fort.

Das fünfte Kapitel.

Von Zunahm und Abnahme der Werthe einer Gleichung, die von beständiger Veränderung der unbekannten Grösse herrühret.

§. 128.

Es sey irgend eine Gleichung:

$$ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} \text{ꝛc.} + r = 0$$

wo die Buchstaben a, b, c, r ꝛc. gewisse beständige Grössen andeuten. Man stelle sich zuerst vor, der Werth der unbekannten Grösse x sey negativ, und groß, und werde durch beständiges Hinzusetzen immer kleiner, bis er = 0 wird: durch ferneres beständiges Hinzusetzen werde er positiv, und wachse sodann auf der positiven Seite ins Unendliche. Unter diesen Veränderungen der unbekannten Grösse wird der Werth der ganzen Gleichung unaufhörlich verändert, und zwar nach folgenden Gesetzen:

1.) Wenn der Werth der unbekannten Grösse x durch alle mittlere Grade der Grösse ohne Sprung ver-

verändert wird, so wird auch der Werth der Gleichung ohne Sprung verändert werden, indem sie also nach und nach durch alle mittlere Grössen durchgehet. Denn indem man sich bey dieser Veränderung vorstellt, die Zunahm oder Abnahme der Grösse x werde unter gewissen Gränzen vermindert, so wird auch die Zu- oder Abnahme aller ihrer Potenzen, und jeder Summe der Potenzen, oder auch der ganzen Gleichung ebenfalls unter gewissen Gränzen vermindert werden: wenn also x unter ununterbrochenen Zu- oder Abnahmen wächßt oder abnimmt, so wird auch die Gleichung selbst auf eben diese Weise wachsen oder abnehmen. Und würklich, wenn man irgend 2 Werthe einer Gleichung, sie mögen einander so nahe seyn, als sie wollen, annimmt, so wird zu einem jeden ein Werth der unbekannten Grösse x gehören, und zu allen mittleren Werthen werden mittlere und unterschiedene Werthe eben dieses x gehören.

2.) Indem durch diese beständige Veränderung der Werth der Gleichung aus dem Negativen in das Positive übergehet, oder aus dem Positiven ins Negative, so muß er nothwendig durch o gehen, oder durchs Unendliche, und das Positive wird an das Negative gewissermassen in o oder im Unendlichen verbunden, wie in der Geometrie der krummen Linien noch deutlicher erhellet.

Z. B. Die Grösse $4 - x$ ist positiv, so lange $4 > x$; wenn aber x wächset, so nimmt sie ab, bis sie, wenn $x = 4$ ist $= 0$ wird: und wenn sodann x fortfähret zu wachsen, so wird sie negativ. Daher also dieser positive Werth in den negativen übergeht durch o.

Eben so ist die Grösse $\frac{8}{4-x}$ positiv, so lange $4>x$; aber wenn x wächset, und sich zu 4 über beliebige Gränzen nähert, so wird auch sie über beliebige Gränzen wachsen: denn gesezt es sey $x=3$ oder $=3,9$ oder $=3,99$, ꝛc. so wird sie $\frac{8}{1}$, $\frac{8}{0,1}$, $\frac{8}{0,01}$ ꝛc. oder, würklich dividirt, $=8, 80, 800$. ꝛc. Und wenn $x=4$ wird, so wird $\frac{8}{0}=\infty$, alsdann, wenn x wächset, geht sie in das Negative über, denn gesezt es sey $x=5$, so wird sie schon $\frac{8}{-1}=-8$. Es wird also der positive Werth negativ, indem er durchs Unendliche gehet.

3.) Im Zutreffen auf 0, oder aufs Unendliche geschiehet aber eben nicht immer ein Uebergang von einem positiven zu einem negativen Werth, oder umgekehrt: sondern öfters ereignet sich eine Rückkehr mit eben dem Zeichen, damit man vorher jene Gränze erreicht hatte.

Z. B. Die Grösse $(4-x)^2=16-8x+x^2$ ist positiv, so lange $x<4$: wird $x=4$, so wird sie $=0$; alsdann, wenn x grösser wird, kehret sie mit eben dem positiven Zeichen zurück, und wenn auch x unendlich wächßt, bleibt sie positiv. Eben so ist die Grösse $-x^2+8x-16$ immer negativ, wird $x=4$, so wird sie $=0$, und wird x noch grösser, so kehret sie unter eben diesem Zeichen von 0 zurück.

Eben so ist die Grösse $\frac{8}{16-8x+x^2}$ positiv, so lange $x<4$, wächßt x und wird $=4$, so wird sie $=\infty$;

wächßt

wächßt sodann x noch weiter, so fängt sie an, auf eben dieser positiven Seite abzunehmen. Denn wird x nach und nach = 2; 3; 3,9; 4; 4,1; 5; 6; 2c. so wird sie = $\frac{8}{4}$, $\frac{8}{1}$, $\frac{8}{0,01}$, $\frac{8}{0}$, $\frac{8}{0,01}$, $\frac{8}{1}$ 2c. oder = 2, 8, 800, ∞, 800, 8, 2. 2c. Eben so die Grösse $\frac{8}{-x^2+8x-16}$, welche immer negativ ist, wird = ∞ wenn x = 4; und wenn x noch ferner wächßt, so geht sie vom Unendlichen zurück, bleibt aber immer negativ.

4.) Der abnehmende Werth einer Gleichung fangt manchmal wieder an zu wachsen, oder ein wachsender fängt an abzunehmen, ehe er ins Unendliche oder 0 übergehet: und im ersten Fall hat er einen gewissen kleinsten Werth (ein *Minimum*) da, wo aus der Abnahme eine Zunahme wird; und im 2ten Fall einen grösten (ein *Maximum*) wo er die Zunahme in Abnahme verwandelt.

Z. B. Der Werth der Gleichung $x^2-8x+20$ ist immer positiv, ob die Grösse x positiv oder negativ ist; aber indem x, das wir kleiner als 4 annahmen, immer vermehrt wird, so nimmt der Werth der Gleichung immer ab, und wird am kleinsten, wenn x = 4 ist; alsdann wenn x wächßt, wächßt er ins Unendliche. Denn $x^2-8x+20=(x-4)^2+4$ oder $=(4-x)^2+4$: nun aber ist $(x-4)^2$ oder $(4-x)^2$ allemal eine grössere oder kleinere positive Grösse, je nachdem x weiter von 4 abstehet, und wird = 0, wenn x = 4 ist; daher $x^2-8x+20$ auch alsdann noch eine positive Grösse ist, aber die kleinste, wenn x = 4 ist. Eben das gilt von der negativen Grösse $-x^2+8x-20$, deren Werth ebenfalls der kleinste ist, wenn x = 4.

Glei-

Gleichergestalt ist der Werth der Gleichung $\frac{8}{x^2-8x+20}$ immer positiv, und indem sich x zu 4 nähert, wächßt er, und wird der gröste, wenn x=4; nimmt hierauf x noch mehr zu, so nimmt er wieder ab. Eben das gilt von der negativen Grösse $\frac{8}{-x^2+8x-20}$, deren Werth ebenfalls der gröste ist, wenn x=4 wird.

5.) Bey diesen Veränderungen der Werthe erhält man öfters mehrmaliges Zutreffen auf o, sowohl mit als ohne Uebergang zum entgegengesezten Zeichen; eben so auch mehrere gröste und kleinste Werthe. Würklich, indem die Wurzel der Gleichung x auf o trifft, so wird die ganze Gleichung = o. sodann geht sie in das entgegengesezte Zeichen über, wenn anders bey diesem Zutreffen nicht eine gerade Anzahl gleicher Wurzeln vorhanden ist; denn wenn eine gerade Anzahl derselben da ist, so geschiehet immer eine Rückkehr von o mit eben demselben Zeichen, wie wir im folgenden sehen werden.

6.) Wenn die Coefficienten der Gleichung endliche Grössen sind, so kann der Werth der Gleichung nicht unendlich werden, so lang das unbekannte x endlich ist. Denn in diesem Fall enthält jedes Glied der Gleichung eine bekannte endliche Grösse, die entweder niemal oder etlichemal mit einer ebenfalls endlichen Grösse multiplicirt ist: daher kann die Summe aller Glieder, oder der Werth der ganzen Gleichung, nicht unendlich seyn.

7.) Endlich, wenn für die unbekannte Grösse x zwey Werthe angenommen werden, aus deren einem ein positiver, aus dem andern ein negativer Werth

der Gleichung herauskommt, so muß zwischen diesen beyden angenommenen Werthen nothwendig eine reale Wurzel enthalten seyn, welche für x angenommen den Werth der Gleichung = o gibt. Denn in diesem Falle kann jener Werth nicht von dem positiven zum negativen durchs Unendliche übergehen, wie wir eben gezeigt haben: also muß er durch o übergehen: daher stecket zwischen diesen beyden für x angenommenen Werthen irgend ein Werth für x, der dem Werth der Gleichung = o zugehört, welcher Werth eine Wurzel der Gleichung ist. (§. 93.)

Anmerkung. Nachdem wir diese Aenderungs-Gesetze durchgegangen haben, so wollen wir nun einige Lehrsätze beyfügen, deren aufmerksame Betrachtung nicht nur zu vollkommenerer Einsicht eben dieser Aenderung ungemein viel beytragen, sondern auch die Eigenschaften der Gleichungen und ganzen Analysis nicht wenig erläutern wird.

§. 129.

Lehrsatz.

Wenn man sich den Werth der unbekannten Grösse ins Unendliche vermehrt oder vermindert vorstellt; so wird das erste Glied der Gleichung unendlich grösser oder unendlich kleiner als die übrigen, so daß es zu jedem folgenden Glied eine auch noch so grosse oder noch so kleine Verhältnis haben kann.

Beweis. Wenn das erste Glied der Gleichung x^{m+n}, und jedes andere bx^m, und jede beliebig grosse oder kleine Verhältniß $1:p$; so wird $x^{m+n} : bx^m = x^n : b$.

Es

Es werde $t^n = p$, $c^n = b$, und man setze $x = \frac{c}{t}$, so ist $x^n = \frac{c^n}{t^n} = \frac{c^n}{p}$, daher $x^n : b = x^n : c = \frac{c^n}{p} : c^n = c^n : pc^n = 1 : p$; welches immerhin wahr bleibt, p mag so klein oder so groß seyn, als es will; bey dessen Abnahm oder Zunahm ins Unendliche, auch t^n abnehmen oder wachsen wird, daher wird auf der andern Seite auch $x = \frac{c}{t}$ wachsen oder abnehmen.

§. 130.

Lehrsatz.

In eben dem Fall kann der Werth der unbekannten Grösse x so groß oder so klein angenommen werden, daß jedes Glied, das eine höhere Potenz derselben enthält, unendlich grösser wird als die Summe aller, die niedrigere Potenzen enthalten, im Ersten Fall: oder daß jedes Glied, das eine niedrigere Potenz derselben enthält, unendlich grösser sey als die Summe aller, welche höhere Potenzen derselben enthalten, im zweyten Falle.

Beweis. Es sey die Zahl aller Glieder $= n$; eine beliebig grosse Verhältnis $1 : q$; und es werde $p = qn$, so kann der Werth des unbekannten x so groß oder so klein angenommen werden, daß das Glied, so im ersten Fall eine höhere Potenz von ihm, im andern eine niedrigere Potenz enthält, zu einem jeden

jeden der übrigen Glieder die Verhältniß 1 : p (§. 129.) oder 1 : qn habe: wird nun also dieses Glied in eine Anzahl gleicher Theile n dividirt, so wird jeder von ihnen zu jedem der übrigen die Verhältnis 1 : q haben, also wird auch dieses ganze Glied sich zur Summe der übrigen wie 1 ; q verhalten.

§. 131.

Zusatz 1. Wenn also für die unbekannte Grösse x ein ziemlich grosser negativer Werth angenommen wird, so wird in den Gleichungen ungeraden Grades das erste Glied negativ seyn, und in Gleichungen geraden Grades positiv: und da in diesem Fall das erste Glied die Summe der übrigen übersteiget, (§. 130.) so wird der Werth der Gleichung in jenen negativ, in diesen positiv. Wird aber für x ein ziemlich grosser positiver Werth angenommen, so wird das erste Glied, also auch der Werth einer jeden Gleichung positiv.

Zusatz 2. Daraus folget aber das, was wir schon oben (§. 103.) angemerkt haben, daß in jeder Gleichung von ungeradem Grade wenigstens Eine reale Wurzel angetroffen werde. Denn sezt man in ihr für x einen ziemlich grossen negativen Werth, so wird der Werth der Gleichung negativ; und sezt man einen ziemlich grossen positiven Werth, so wird eben dieser Werth positiv (Zusatz 1): daher zwischen diesen beyden für x angenommenen Werthen immer eine mittlere reale Wurzel enthalten seyn wird. (§. 128.)

Zusatz 3. Eben so folget, die Zahl der realen Wurzeln in einer Gleichung ungeraden Grades sey allezeit ungerad; in einer Gleichung geraden Grades müsse sie nothwendig gerad seyn. Denn es sey

irgend

irgend einer Gleichung, welche ein unbekanntes x enthält, ihre reale Wurzel = p, so kann diese Gleichung genau dividirt werden durch x — p (§. 98. Zus. 3.) und der Quotient wird eine neue Gleichung seyn, die um einen Grad niedriger ist, und alle übrige Wurzeln enthält: wenn daher jene erste Gleichung von ungeradem Grade war, so wird diese andere von geradem Grade seyn, welche, wenn sie wieder eine reale Wurzel = q hat, genau durch x — q dividirt werden kann; wodurch eine um einen Grad niedrigere Gleichung ungeraden Grades entstehet, welche nothwendig wenigstens Eine reale Wurzel hat = r (Zusatz 2.) und daher genau durch x — r dividirt werden kann. Daher die vorgelegte Gleichung von ungeradem Grade, welche nothwendig eine reale Wurzel haben muß (Zusatz 2.), wenn sie deren zwey hat, p und q, nothwendig auch die dritte hat, = r. Wenn sie 4 hat, so hat sie nothwendig auch die fünfte, u. s. f. Gleichergestalt, wenn eine Gleichung geraden Grades Eine hat, so hat sie auch nothwendig die 2te; wenn sie 3 hat, so hat sie auch die 4te, u. s. f.

Zusatz 4. Die Anzahl imaginärer Wurzeln in jeder Gleichung kann nicht anders, als gerad seyn; das wir ebenfalls schon gezeigt haben. (§. 103. Zus. 11.) Denn insonderheit in Gleichungen ungeraden Grades ist die Anzahl aller Wurzeln ungerade (§. 98. Zus. 5.) und die Wurzel der realen ebenfalls ungerade (Zusatz 3.): also muß die Anzahl der eingebildeten gerade seyn, da eine ungerade Anzahl aller Wurzeln nicht aus 2 ungeraden Zahlen entstehen kann. Hernach, in Gleichungen geraden Grades ist die Anzahl aller Wurzeln gerade, (§. 98. Zus. 5.) und der realen ebenfalls gerade (Zus. 4.), folglich muß auch die Anzahl der imaginären gerade seyn, indem

dem eine gerade Zahl aller Wurzeln nicht aus einer geraden und ungeraden Zahl entspringen kann.

§. 132.

Lehrsatz.

Der Werth einer Gleichung, welche lauter reale und ungleiche Wurzeln hat, gehet nach geschehenem Zutreffen auf o zum entgegengesezten Zeichen über.

Beweis. Denn wenn eine solche Gleichung von ungeradem Grade ist, und man sezet für x einen ziemlich grossen negativen Werth, so wird der Werth der Gleichung ziemlich groß und negativ (§. 131. Zusaz 1.), hernach wird er, wenn die unbekannte Grösse x, auf der negativen Seite abnimmt, immer auch abnehmen, und wenn x zum Werth der ersten Wurzel kommt, wird er = o werden, und wird hernach anfangs positiv wachsend. Hernach wird er nothwendig irgendwo abzunehmen anfangen, indem er, wenn x zum Werth der anderen Wurzel gelanget, abermal = o werden muß; sodann wird er negativ und anfangs wachsend, hierauf abnehmend, bis er wieder = o wird, wenn x zum Werth der 3ten Wurzel gelanget, u. s. f. Wenn aber die Aequation von geradem Grade ist, so wird ihr anfangs positiver Werth in den negativen Werth übergehen, wenn das unbekannte x zu dem Werth der ersten Wurzel gekommen ist; sodann in den positiven, u. s. f. Woraus zugleich erhellet, daß der Werth der Gleichung zwischen jeden 2 realen Wurzeln irgendwo am grösten (ein *Maximum*) werde.

Anmerkung. Damit die im folgenden vorkommende Beyspiele desto leichter verstanden werden

mögen, so wollen wir die positiven Werthe einer Gleichung durch aufwärts gezogene Ordinaten irgend einer krummen Linie vorstellen, die negative aber durch abwärts gezogene Ordinaten; das Zutreffen der unbekannten x zu den Wurzeln selbst aber durch Durchschnitte, worinnen die krumme Linie der Axe der Abscissen begegnet, woselbst demnach keine Ordinate ist, oder der Werth der Gleichung $=0$ wird.

Z. B. Wenn in der Gleichung $x^5 - 7x^4 - 7x^3 + 79x^2 + 6x - 72 = 0$, deren Wurzeln
Fig. I. sind -3; -1; 1; 4; 6, für x irgend eine ziemlich grosse negative Zahl angenommen wird, so wird in der 1sten Figur der Werth der Gleichung MN negativ, und wenn x zur ersten Wurzel -3 gelanget, so wird eben dieser Werth $=0$, sodann gehet er ins positive OP über, und bleibt im Anfange positiv wachsend, sodann wird er abnehmend, so lange der Werth der unbekannten x zwischen der ersten Wurzel -3 und zwischen der zweyten -1 sich befindet; aber wenn $x = -1$ wird, so wird dieser Werth abermal $=0$, und gehet ins negative QR, bleibt anfangs negativ wachsend, sodann abnehmend, so lange der Werth zwischen der zweyten Wurzel -1 und der dritten 1 ist; wird er aber selbst $=1$, so wird abermal der Werth der Gleichung $=0$, gehet sodann ins positive ST zwischen den Wurzeln 1 und 4, und wieder ins negative VX zwischen den Wurzeln 4 und 6; aber nach dem Zutreffen zur Wurzel 6 bleibt er hierauf immer positiv.

§. 133.

Lehrsatz.

Wenn der Werth des Unbekannten auf eine gerade Zahl gleicher Wurzeln trifft, so ändert der Werth

der

der Gleichung nach o das Zeichen nicht, sondern gehet von o mit beybehaltenem Zeichen zurück: hingegen gehet er durch o mit geändertem Zeichen, wenn der Werth des Unbekannten auf eine ungerade Anzahl gleicher Wurzeln trifft.

Beweis. Wenn die Werthe zweyer Wurzeln z. B. — 3 und — 1 im vorigen Beyspiel sich einander nähern, so wird nach und nach der dazwischen enthaltene Bogen P verringert, oder jener Zwischenraum, worinnen der Werth der Gleichung in der ersten Wurzel — 3 bey seinem Durchgang durch o im Anfang gewachsen, sodann abgenommen, und in der 2ten Wurzel — 1 abermal auf o gekommen: also wird, wenn jene beyde Wurzeln, — 1 und — 3 nach und nach also zusammen kommen, daß sie endlich unter sich gleich werden, jener Zwischenraum gänzlich aufgehoben, und indem die Durchschnittspunkten — 3 und — 1 zusammenfallen, so verschwindet der Bogen P gänzlich, und auf den Bogen N folgt unmittelbar der Bogen R, daher der Werth der Gleichung im Zutreffen auf 2 gleiche Wurzeln oder auf eine doppelte Wurzel von o zurückkehret mit beybehaltenem Zeichen. Wenn 3 Wurzeln, — 3, — 1 und 1 einander gleich werden, so erhellet, daß bey dem Zusammenfallen dieser 3 Durchschnittspunkten die Bögen P und R verschwinden, und auf den Bogen N unmittelbar der Bogen T folge, daß also der Werth der Gleichung durch o gehe bey veränderten Zeichen. Wenn 4 Wurzeln, — 3, — 1, 1 und 4 gleich werden, so verschwinden beym Zusammenfallen von 4 Durchschnittspunkten die Bögen P, R, T, und auf den Bogen N folgt unmittelbar der Bogen X, also kehret der Werth der Gleichung von o zurück, mit beybehaltenem Zeichen. u. s. f.

Fig. 2. Z. B. Es sey die Gleichung
$x^5 - 5x^4 - 9x^3 + 53x^2 + 8x - 48 = 0$, welche eben die Wurzeln hat, wie die vorige, nur daß beyde lezte 4 und 6 in dieser einander gleich sind, nemlich beyde $= 4$: indem die Punkten 4 und 6 der ersten Figur zusammenfallen, so wird Fig. 2. der Bogen X verschwinden, also wird die krumme Linie in diese gegenwärtige verwandelt werden, und der Werth der Gleichung von -3 bis -1 wird positiv seyn; von -1 bis zu 1 wird er negativ seyn, von 1 bis 4'' positiv, sodann zwar beym würklichen Zutreffen des unbekannten x zu 4'' wird er $= 0$, aber hernach kehret er wieder zurück von 0, und bleibet positiv, wie sogleich erhellet, wenn man substituirt.

Fig. 3. Es sey Fig. 3. die Gleichung $x^5 - 8x^4 + + 3x^3 + 92x^2 - 112x - 192 = 0$. welche die Wurzeln hat: $-3, -1, 4, 4, 4$; da jezt in der ersten Figur die 3 lezten Punkte 6, 4, 1, zusammenfallen, so verschwinden die Bögen X und T, und die krumme Linie gehet in gegenwärtige über; also wird der Werth der Gleichung von -3 bis zu -1 positiv seyn, von -1 bis zu 4''' negativ, und von 4''' an sofort immer positiv; daraus erhellet, daß bey dieser 3fachen Wurzel 4''' der Werth der Gleichung durch 0 gehe, und das Zeichen ändere.

Fig. 4. Es sey Fig. 4. die Gleichung $x^5 - 13x^4 + + 32x^2 - 512x + 768 = 0$, welche die Wurzeln hat $-3, 4, 4, 4, 4$; da jezt nach der ersten Figur die 4 lezte Punkten 6, 4, 1, -1 zusammenfallen, so verschwinden die Bögen X, T, R, und die krumme Linie verwandelt sich in gegenwärtige; und daher wird der Werth der Gleichung von -3 bis zu 4'''' positiv, und wenn $x = 4''''$ wird, so kommt er zwar zu 0,

gehet

gehet aber nicht hindurch, sondern kehret auf eben dieser positiven Seite zurück.

§. 134.

Zusatz 1. Es kann geschehen, daß 2 gleiche Wurzeln imaginär sind, wenn nemlich der Werth der Gleichung, der sonsten von 0 mit Beybehaltung des vorigen Zeichens zurückgienge, (§. 133.) dieses 0 nicht erreichet, sondern noch vor 0 zurückkehret, und wieder zu wachsen anfängt. Siehe Fig. 5.

Z. B. In der Gleichung $x^5 - 5x^4 - 8x^3 + 56x^2 + 7x - 51 = 0$, deren Wurzeln sind -3, -1, 1, $4 + \sqrt{-1}$, $4 - \sqrt{-1}$; ist der Werth von -3 bis zu -1 positiv, von -1 bis 1 ist er negativ, anfangs wachsend, hierauf abnehmend, und ehe er noch zu 0 kommt, fangt er wieder an zu wachsen, und wächßt sodann ins Unendliche, wie man leicht siehet, wenn man substituiren will; es wird daher jene erste Figur in gegenwärtige verwandelt. Fig. 5.

§. 135.

Zusatz 2. Indem eine Gleichung einen gewissen kleinsten Werth hat, so daß sie vom Abnehmen z. B. Fig. 6. bis zu T zum Wachsen übergehet ohne zu 0 zu kommen, so wird man jedesmal wenigstens 2 imaginäre Wurzeln erhalten; im Gegentheil aber, wenn 2 imaginäre Wurzeln da sind, so ist nicht immer jener kleinste Werth vorhanden, sondern öfters wird jener Zwischenraum von R bis T aufgehoben, und der Werth fähret fort, unaufhörlich zu wachsen.

Z. B. In der Gleichung $x^5 - 3x^4 - 9x^3 + 33x^2 + 8x - 30 = 0$, deren Wurzeln sind -3, -1, 1, $2 + \sqrt{-1}$, $2 - \sqrt{-1}$, ist der Werth von -3 bis zu -1 positiv, von -1 bis zu 1 ist er negativ, und sodann immer positiv wachsend, wie aus der Substitution und der Fig. 6. erhellet. Fig. 6.

Das sechste Kapitel.

Von den grösten und kleinsten Werthen der Gleichungen.

§. 136.

Um die Werthe der unbekannten Grösse x zu bestimmen, denen die gröste oder kleinste Werthe der Gleichung zugehören, muß man die Zunahmen oder Abnahmen der Werthe der Gleichung betrachten, welche aus dem beständigen Wachsthum der unbekannten Grösse x entstehen. Diese Zunahmen oder Abnahmen der Werthe sowohl der Gleichung selbst, als des unbekannten x werden wir im folgenden die Differentiale (*Differentialia*) nennen, und die Zunahme des unbekannten x werden wir durch dx anzeigen.

§. 137.

Es sey also irgend eine Gleichung $x^m + ax^n + + bx^r$ ꝛc. worinnen das unbekannte x um das Differential dx wachsen soll; so werden eben dadurch alle Glieder, worinnen x ist, verändert werden, und zwar wenn in jeden für x substituirt wird $x + dx$, so wird eine neue Gleichung herauskommen, und wenn von dieser jene erste abgezogen wird, so wird sich das Differential der vorgelegten Gleichung ergeben, welches aus jenem Differential dx des unbekannten x entstanden ist. Weil aber diese Art, die Differentialen zu untersuchen, öfters mühsam ist, so wollen wir hier einen andern allgemeinen Weg vortragen.

§. 138.

Aufgabe.

Das Differential einer jeden gegebenen Gleichung zu finden.

Auflösung. Es sey jedes Glied einer vorgegebenen Gleichung px^t; setzet man $x + dx$ für x, so kommt $px^t = (x + dx)^t = px^t + tpx^{t-1}\,dx + \frac{t.t-1}{1.2.}px^{t-2}\,dx^2 + \frac{t.t-1.t-2}{1.2.3.}px^{t-3}\,dx^3$ ꝛc. wenn man daher px^t weghebet, so bleibet das Differential dieses Gliedes $tpx^{t-1}\,dx + \frac{t.t-1}{1.2}px^{t-2}\,dx^2 + \frac{t.t-1.t-2}{1.2.3}px^{t-3}\,dx^3$ ꝛc. Wenn nun die Summe aller Glieder tpx^{t-1}, welche aus allen Gliedern der gegebenen Gleichung kommen $= P$ angenommen wird, die Summe aller $\frac{t.t-1}{1.2}px^{t-2} = Q$, die Summe aller $\frac{t.t-1.t-2}{1.2.3}px_{t-3} = R$ ꝛc. so wird das gesuchte Differential $= Pdx + Qdx^2 + Rdx^3$ ꝛc.

Ferner, P, oder tpx^{t-1} entstehet aus px^t multiplicirt mit t dem Exponenten des unbekannten x, und dividirt durch x. Q entstehet aus P multiplicirt mit $t-1$, dem Exponenten von x, und dividirt durch $2x$. R entstehet aus Q multiplicirt mit dem Exponenten $t-2$, und dividirt durch $3x$, u. s. f. Es sind also P, Q, R ꝛc. hergeleitete Gleichungen (§. 117.), bey welcher Herleitung das Glied, welches in der vorhergehenden Gleichung kein unbekanntes x in sich fass-

te, oder x^0 enthielt, verschwindet, wenn es mit dem Exponenten 0 multiplicirt wird. Und also nimmt unter dem Herleiten die Anzahl der Glieder ab, und in der zulezt hergeleiteten ist kein unbekanntes x mehr; leitet man aus derselben noch ferner eine neue Formel her, so wird solche $=0$.

Z. B. Man sucht das Differential der Gleichung $x^4 - 16x^3 + 88x^2 - 192x + 120 = 0$, welche man A nenne; so werden die aus derselben hergeleitete Gleichungen

$$P = 4x^3 - 48x^2 + 176x - 192$$
$$Q = 6x^2 - 48x + 88$$
$$R = 4x - 16$$
$$S = 1.$$

Wird nun die Formul P mit dx multiplicirt, Q mit dx^2, R mit dx^3, S mit dx^4 ꝛc. so hat man das Differential der vorgelegten Gleichung.

§. 139.

Zusaz 1. Wenn man für x jeden bestimmten Werth sezt, doch nicht von der Art, daß aus dieser Voraussezung die Formul $P=0$ werde, und nimmt an, dx werde ins Unendliche vermindert, so werden alle Glieder $Qdx^2 + Rdx^3$ ꝛc. ins Unendliche kleiner als das erste Glied Pdx (§. 130.), und das ganze Differential wird beynahe eben diesem Pdx gleich, wird also eben dieses Zeichen haben, das Pdx hat. Hat daher Pdx ein mit dem Werth der gegebenen Gleichung übereinkommendes Zeichen, so wird jener Werth eine Zunahme bekommen, ist aber das Zeichen nicht übereinstimmend, eine Abnahme.

Zusaz 2. Wenn $P=0$, da das erste Glied des Differentials Pdx verschwindet, so wird das zweyte Qdx^2 beynahe das Differential der Gleichung ausdrücken.

drucken. Wenn sowohl P als Q = o ist, so wird eben dieses Differential das 3te Glied Rdx^3 ausdrucken u. s. f.

§. 140.

Lehrsatz.

Wenn der Werth der gegebenen Gleichung zu einem grösten oder kleinsten kommt, so muß die zuerst hergeleitete Gleichung P = o seyn.

Beweis. Denn, wenn der Werth der Gleichung aufs gröste steiget, oder aufs kleinste fället, so gehet er vom Wachsen zum Abnehmen, oder umgekehrt, über: nun aber, ausser den Fällen, worinnen x einen Werth hat, der die Formul P auf o bringt, d. i. den Werth der Wurzel der Gleichung P = o, bekommt der Werth der Gleichung Zunahm oder Abnahme, je nachdem P ein gleich- oder ungleichförmiges Zeichen mit ihm hat (§. 139. Zusatz 1.). Daher, weil, wenn der Werth der Gleichung zu einem grösten oder kleinsten gelangt, das Wachsen sich in Abnehmen, oder umgekehrt, verwandlen muß, so muß P das Zeichen ändern, und also durch o durchgehen (§. 128.), da es nicht durchs Unendliche gehen kann, oder P muß = o seyn.

§. 141.

Zusatz. Unter dem Namen des kleinsten kommen auch solche Fälle vor, in denen der Werth der Gleichung, der zu o kommt, von da mit Beybehaltung des Zeichens zurückkehret, und da ist jener kleinste Werth = o. Nicht aber gehören hieher solche Fälle, worinnen nach dem Durchgang durch o das

Zeichen des Werths verändert wird: denn da dieser Durchgang vermittelst beständiger Addition oder Subtraktion geschiehet, so werden an sich selbst die Abnahmen oder Zunahmen nicht verändert, sondern gewissermassen fortgesezt.

§. 142.

Aufgabe.

Es wird eine Gleichung gegeben, welche ein Gröstes und Kleinstes hat, man solle den Werth des Unbekannten finden, der jenem grösten oder kleinsten Werth zugehöret.

Auflösung. Aus der gegebenen Gleichung wird die Gleichung P nach dem oben angeführten Gesez hergeleitet, (§. 138.) und $=0$ gesezt; unter den Wurzeln derselben werden alle diejenigen Werthe des unbekannten x enthalten seyn, denen der gröste oder kleinste Werth der gegebenen Gleichung zugehöret.

Beweis. Denn indem die unbekannte Grösse x zu den Werthen gelanget, denen jener gröste oder kleinste Werth zugehöret, so wird die hergeleitete Gleichung $=0$, (§. 140.) also bringen jene Werthe des unbekannten x die Gleichung P auf 0, und sind demnach unter ihren Wurzeln. (§. 93.)

Z. B. Es sey die Zahl 8 also in 2 Theile zu theilen, daß wenn man von der 4ten Potenz der Differenz unter einem Theil und der Hälfte der ganzen Zahl 8 subtrahiret das achtfache Quadrat der Differenz unter dem andern Theil und dieser Hälfte, der Rest ein Gröstes oder ein Kleinstes sey.

Es sey ein Theil $=x$, so ist der andere $=8-x$, und jenes seine Differenz von der Hälfte $=x-4$, und dieses seine Differenz $=8-x-4$ oder $4-x$.

Des

Des ersten vierte Potenz ist $x^4 - 16x^3 + 96x^2 - 256x + 256$, des lezteren 8faches Quadrat ist $128 - 64x + 8x^2$; dieses vom ersten abgezogen gibt die Formul $x^4 - 16x^3 + 88x^2 - 192x + 128$, dessen Gröstes oder Kleinstes gesucht wird.

Nach geschehener Herleitung ist demnach $P = 4x^3 - 48x^2 + 176x - 192 = 0$, oder, durch 4 dividirt, $x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = 0$, davon die Wurzeln sind 2, 4, 6, wie durch Substitution klar ist. Wenn nun in obiger Gleichung, deren Gröstes oder Kleinstes man sucht, für x anfangs jeder negative Werth gesezt wird, der durch beständige Addition vermindert, und sodann $= 0$ wird, sodann positiv, jedoch kleiner als Q, so wird der Anfangs positive Werth der Gleichung MN, der im Anfang positiv ist, (Fig. 7.) immer abnehmen, und bey seinem Durchgang durch o negativ werden, und so lang wachsen, bis $x = 2$ werde. Daselbst wird er der gröste werden, sodann wird er abnehmen, und wenn $x = 4$, wird er $= 0$ werden. Wenn hierauf x vermehrt wird, wird er aus eben der negativen Seite zurückkehren, und der gröste werden, wenn $x = 6$; nun wird er anfangen abzunehmen, und wenn er durch o gehet, sofort auf der positiven Seite unaufhörlich wachsen. Es hat demnach die gegebene Gleichung 2 Maxima, welche den Werthen $x = 2$ und $x = 6$ entsprechen, und ein Minimum $= 0$, so dem Werth $x = 4$ entspricht. Fig. 7.

§. 143.

Zusaz. Wenn eine gegebene Gleichung einen grösten oder kleinsten Werth hat, so wird der Werth des unbekannten x, dem jener entspricht, zwar immer unter den Wurzeln der zuerst hergeleiteten Gleichung $P = 0$ seyn; nicht aber umgekehrt haben alle Wurzeln

zeln der Gleichung $P=0$ ein Maximum oder Minimum.

Z. B. Man suche in obiger Gleichung den grösten oder kleinsten Rest, wenn aus jener 4ten Potenz eben dasselbe Quadrat 16mal genommen abgezogen wird, und das achtfache Quadrat des ersten Theils. Von der Potenz $x^4 - 16x^3 + 96x^2 - 256x + 256$ wird abzuziehen seyn $16x^2 - 128x + 256$, und $8x^2$, also wird der Rest, dessen Gröstes oder Kleinstes gesucht wird $= x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 128x$, daher nach hergeleiteter Gleichung P kommt $4x^3 - 48x^2 + 144x - 128 = 0$, oder alles durch 4 dividirt, $x^3 - 12x^2 + 36x - 32 = 0$, davon die Wurzeln sind 2, 2, 8; deren erste beyde weder ein Maximum noch Minimum geben. Denn wenn man für x einen ziemlich grossen negativen Werth annimmt, der nach und nach abnimmt und ins Positive übergehet, so wird der Werth der Gleichung MN
Fig. 8. (Fig. 8.) im Anfang positiv, und ziemlich groß, nimmt hierauf ab, und wird, nachdem er 0 durchlossen, negativ, und fährt fort, auf der negativen Seite zu wachsen, sowohl ehe $x=2$ wird, als nachgehends, bis er, nachdem $x=8$ worden, der gröste wird: wächßt sodann x noch weiter, so nimmt er ab, gehet durch 0, wird positiv, und wächßt auf positiver Seite immer fort.

Anmerkung. Aus dem bisherigen erhellet, wenn die zuerst hergeleitete Gleichung $P=0$ gesezt wird, oder, welches eben so viel ist, wenn das Differential einer Aequation $=0$ gesezt wird, daß die Wurzeln der Gleichung P nicht eben allgemein zu Entdeckung des Grösten oder Kleinsten angenommen werden können: denn obwohl in jeder gegebener Gleichung kein Gröstes oder Kleinstes vorhanden seyn kann, daß nicht auch

der

der ihm entsprechende Werth des Unbekannten unter den Wurzeln der Gleichung $P=0$ enthalten sey (§. 142.); so haben doch nicht im Gegentheil alle diese Wurzeln ein Gröstes oder Kleinstes. Man muß deßwegen eine General-Regul suchen, aus der sich bestimmen läßt, ob eine Wurzel der hergeleiteten Gleichung $P=0$ ein Gröstes oder Kleinstes gebe, oder nicht: auch ob sie eher ein Gröstes, als ein Kleinstes gebe?

§. 144.

Lehrsatz.

Keine Gleichung von irgend einem Grade m kann mehrere Maxima oder Minima haben, als an der Anzahl $m-1$.

Beweis. Denn wenn die gegebene Gleichung von irgend einem Grade m ist, so ist ihre zuerst hergeleitete P vom Grade $m-1$ (§. 138.) welche nicht mehr Wurzeln haben kann, als $m-1$. (§. 98. Zusatz 5.) Nun aber müssen alle Werthe des unbekannten x, welche ein Gröstes oder Kleinstes geben, unter den Wurzeln der Aequation $P=0$ enthalten seyn, (§. 142.) daher die Zahl der Maximorum oder Minimorum nicht grösser seyn kann, als $m-1$.

§. 145.

Lehrsatz.

Wenn eine gegebene Gleichung lauter reale und ungleiche Wurzeln hat, so hat auch ihre zuerst hergeleitete P lauter reale und ungleiche Wurzeln, deren jede ein Maximum der gegebenen Glei-

chung

chung gibt, und keine davon trifft mit ihren Wurzeln überein.

Beweis. Denn zwischen irgend 2 nächsten ungleichen Wurzeln der gegebenen Gleichung sind alle Maxima derselben begriffen (§. 132.), also stecken alle diesen Maximis entsprechende Werthe des unbekannten x zwischen 2 ungleichen Wurzeln der gegebenen Gleichung, nemlich einer zwischen der ersten und 2ten Wurzel, der andere zwischen der 2ten und 3ten, u. s. f. Wenn demnach die Anzahl dieser Wurzeln $= m$ ist, so werden jene Werthe des unbekannten x an der Anzahl $= m - 1$, und zwar alle real und ungleich, da jeder zwischen 2 realen und ungleichen der gegebenen Gleichung steckt; und alle müssen daher eben deßwegen verschieden von den Wurzeln der gegebenen Gleichung seyn: nun aber sind alle diese Werthe des unbekannten x Wurzeln der Gleichung $P = 0$ (§. 142.), daher kann sie nicht mehrere Wurzeln haben, als an der Anzahl $m - 1$. (§. 98. Zusatz 5. §. 144.). Also geben alle Wurzeln der Gleichung $P = 0$ ein Maximum, und sind real, ungleich, und verschieden von den Wurzeln der gegebenen Gleichung.

§. 146.

Lehrsatz.

Wenn eine gegebene Gleichung eine Anzahl n gleicher Wurzeln enthält, so wird die zuerst hergeleitete Gleichung P eine Anzahl derselben $n - 1$ enthalten; die zum zweytenmal hergeleitete Q die Anzahl $n - 2$, die zum drittenmal hergeleitete die Anzahl $n - 3$, und so fort.

Be-

Beweis. Denn man stelle sich vor, zwey Wurzeln irgend einer gegebenen Gleichung kommen zusammen, und werden gleich, so wird jenes zwischen ihnen enthaltene Maximum (§. 145.) nun ein Minimum, oder $=0$ und der Werth der Gleichung kehret von 0 zurück (§. 133.). Also muß der jenem Minimo oder 0 entsprechende Werth des unbekannten x unter den Wurzeln der zuerst hergeleiteten Gleichung $P=0$ enthalten seyn (§. 142.), welcher Werth daselbst mit jenen 2 übereinstimmenden Wurzeln der gegebenen Gleichung übereinstimmen wird. Wenn folglich eine gegebene Gleichung 2 gleiche Wurzeln hat, so wird die zuerst hergeleitete P aus denenselben Eine gemein haben. Eben so erhellet, wenn 3 Wurzeln in der gegebenen Gleichung zusammenkommen, daß von der Gleichung $P=0$ zwey Wurzeln, welche zwischen jenen dreyen lagen, mit denselben übereinstimmen; und überhaupt, wenn daselbst eine Anzahl Wurzeln n zusammenkommt, daß die Gleichung $P=0$ von diesen Wurzeln eine Anzahl $n-1$ haben werde. Und da Q aus P nach dem nemlichen Gesez hergeleitet wird, wie P aus der gegebenen Gleichung; eben so R aus Q, S aus R ꝛc. so wird von den Wurzeln, deren die Gleichung $P=0$ die Anzahl $n-1$ hat, die Gleichung $Q=0$, die Anzahl $n-2$ haben, $R=0$ die Anzahl $n-3$, u. s. f. (§. 117. Zusatz 4. und 6.)

§. 147.

Aufgabe.

Man soll untersuchen, ob eine Wurzel einer gegebenen Gleichung mehrmal oder nur Einmal da sey.

Aufl. Aus der gegebenen Gleichung leite man die Gleichungen P, Q, R ꝛc. her (§. 138.) und sub-

substituire in einer jeden für das unbekannte x den Werth der Wurzel, von der die Rede ist; wenn nach dieser Substitution die Gleichung P nicht verschwindet, oder nicht $=0$ wird, so ist jene Wurzel der Gleichung P und der gegebenen nicht gemein, und daher nicht mehrfach, sondern nur einfach (§. 146.): Wenn P verschwindet, oder wenn bey Berechnung auch der gegebenen Gleichung A selbst, welche immer verschwindet, beyde A und P verschwinden, aber nicht die übrigen Q, R, S ꝛc. so ist die Wurzel 2fach; wenn 3 verschwinden, A, P, Q, so ist die Wurzel 3fach; und überhaupt ist sie so vielfach, so viele Gleichungen A, P, Q, R ꝛc. verschwinden. (§. 146.)

Z. B. Man suche, ob die Wurzel 1 der Gleichung $x^5 - 5x^4 - 9x^3 + 53x^2 + 8x - 48 = 0$ mehrfach oder einfach sey. Man leite aus ihr die Gleichung P her $= 5x^4 - 20x^3 - 27x^2 + 106x + 8$; wenn man in dieser für x sezt 1, so wird die Summe $= 72$: daher ist die Wurzel 1 einfach. Aber wenn man die andere Wurzel der gegebenen Gleichung 4 für x sezet, so verschwindet auch die Gleichung P, nicht aber verschwinden die übrige Q, R ꝛc. daher ist die Wurzel 4 zweyfach.

Man suche auch, ob die Wurzel 4 der Gleichung $A = x^5 - 13x^4 + 48x^3 + 32x^2 - 512x + 768 = 0$ mehrfach oder einfach sey? Nach gewöhnlich gemachten Herleitungen ist

$$A = x^5 - 13x^4 + 48x^3 + 32x^2 - 512x + 768$$
$$P = 5x^4 - 52x^3 + 144x^2 + 64x - 512$$
$$Q = 10x^3 - 78x^2 + 144x + 32$$
$$R = 10x^2 - 52x + 48$$

Sezet man nun in jeder 4 für x, so verschwinden alle 4 Gleichungen A, P, Q, R, nicht aber wird S ver-

verschwinden $= 5x - 13$: demnach ist die Wurzel 4 vierfach, oder die gegebene Gleichung hat 4 gleiche Wurzeln 4.

§. 148.

Aufgabe.

Man soll untersuchen, ob eine gegebene Gleichung ein Maximum oder Minimum habe; oder ob die Wurzeln der hergeleiteten Gleichung P ein Maximum oder Minimum geben?

Aufl. Man setze die hergeleitete Gleichung $P=0$, und suche wie unten gelehret wird, ihre Wurzeln; so wird jede gefundene Wurzel ein Maximum oder Minimum geben: 1.) wenn sie einfach ist, 2.) wenn von diesen gleichen Wurzeln die Gleichung P eine ungerade Anzahl hat, oder, welches eben das ist, wenn die Anzahl der verschwindenden hergeleiteten Gleichungen ungerade ist: ist sie aber gerade, so wird sie kein Maximum oder Minimum geben.

Beweis. Denn sezt man für das unbekannte x irgend einen Werth, der auch noch so wenig von demjenigen abstehet, dem ein Maximum oder Minimum entspricht, (denn wenn für x der Werth selbst der dem Maximo oder Minimo entspricht, gesezt würde, so würde $P=0$, indem dieser Werth eine Wurzel der Gleichung $P=0$ ist) so kommt nicht $P=0$; also wird das Differential der Gleichung zunächst Pdx (§. 139.), und wird positiv oder negativ seyn, je nachdem der Werth P positiv oder negativ ist: wenn daher beym Zutreffen des unbekannten x zu irgend einer Wurzel der Gleichung $P=0$, das P sein Zeichen ändert, so wird auch das Differential der Aequation

tion daselbst sein Zeichen ändern, und die Zunahme wird in Abnahme übergehen, oder umgekehrt, oder man hat ein Maximum oder Minimum; nun aber gehet P durch o hindurch, und ändert das Zeichen, wenn die Wurzel desselben, zu welcher x kommt, einfach ist, oder wenn die Anzahl der gleichen Wurzeln ungerade ist; hingegen gehet es nicht durch, und kehret mit beybehaltenem Zeichen von o zurück, wenn eben diese Anzahl gerade ist (§. 133.): demnach hat man im ersten Fall ein Maximum oder Minimum, im andern aber nicht.

Beyspiele.

I.) Wenn aus der Gleichung $x^4 - 16x^3 + 88x^2 - 192x + 128 = 0$ die Gleichung P hergeleitet wird, $= 4x^3 - 48x^2 + 176x - 192 = 0$, so werden die Wurzeln dieser hergeleiteten 2, 4, 6, davon eine jede einfach ist, oder keine ist der gegebenen Gleichung gemein: daher alle ein Maximum oder Minimum geben, wie wir oben §. 142. gesehen haben. Würde man jene 3 Wurzeln der Gleichung $P = 0$ besonders entdeckt haben, so würde sich leicht ergeben, ob sie ein Maximum oder Minimum geben: denn wenn man die 2te Gleichung herleitet, $Q = 6x^2 - 48x + 88$, so würde diese nicht verschwinden, welche von jenen 3 Wurzeln man auch für x sezte: daher, da nur die einzige Gleichung P in allen Wurzeln verschwindet, so gibt jede derselben ein Maximum oder ein Minimum.

II.) Wenn aus der Gleichung $x^5 - 10x^4 + 30x^3 - 40x^2 + 25x - 2 = 0$ die Gleichung P hergeleitet wird, $= 5x^4 - 40x^3 + 90x^2 - 80x + 25 = 0$, oder $x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 16x + 5 = 0$,

so

so sind ihre Wurzeln 1, 1, 1, 5, demnach gibt beyderley Wurzel 1 und 5 ein Maximum oder Minimum. Wir wollen aber setzen, die einzige Wurzel 1 werde besonders bekannt, damit erhelle, ob sie ein Maximum oder Minimum gebe, so leite man mehrere Gleichungen her, P, Q, R, S. ꝛc. in denen allen für x, 1 substituirt werde, so verschwinden von ihnen 3, nemlich P, Q, R, daraus man schliesset, daß ihr ein Maximum oder Minimum entspreche. Gleichergestalt, wenn man allein die Wurzel 5 wüßte, so würde bey ihrer Substitution allein die Gleichung P verschwinden; daraus abermal erhellte, daß ihr ein Maximum oder Minimum entspreche.

III.) Wenn aus der Gleichung $x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 128x = 0$ die Gleichung P hergeleitet wird, $= 4x^3 - 48x^2 + 144x - 128 = 0$, oder $x^3 - 12x^2 + 36x - 32 = 0$, so werden ihre Wurzeln seyn 2, 2, 8; da nun die erste davon 2fach ist, so gibt sie weder ein Maximum noch Minimum; aber die 2te x ist einfach, und gibt eines von beyden, wie wir §. 143. gesehen haben. Wir wollen abermal annehmen, man wisse nur die Wurzel 2 oder 8; so leite man mehrere Gleichungen her, P, Q, R ꝛc. wird in diesen 2 für x substituirt, so verschwinden zwey, P und Q; wird aber 8 substituirt, so verschwindet allein P: demnach zeiget die gerade Anzahl derer, die verschwinden, daß der Wurzel 2 kein Maximum oder Minimum entspreche; hingegen die ungerade Anzahl derselben ist ein Merkmal, daß der Wurzel 8 eines derselben entspreche.

§. 149.

Aufgabe.

Man soll untersuchen, ob die Wurzeln der hergeleiteten Gleichung P ein Maximum oder Minimum geben.

Aufl. Die Wurzel der hergeleiteten Gleichung $P = 0$, wovon die Rede ist, substituire man sowohl in der gegebenen Gleichung für das unbekannte x, als in den hergeleiteten P, Q, R ꝛc. Wenn die gegebene Gleichung verschwindet, so hat man jenes Minimum $= 0$, wovon oben §. 141. Wenn aber die Werthe der gegebenen Gleichung, und der hergeleiteten, (welche erstere nicht verschwindet,) die aus dieser Substitution herkommen, eben dasselbe Zeichen haben, so gibt jene Wurzel ein Minimum; haben sie entgegengesezte Zeichen, so gibt sie ein Maximum.

Beweis. Denn indem $P = 0$ wird, nicht aber $Q = 0$, so ist das Differential der gegebenen Gleichung zunächst Qdx^2: wird aber auch $Q = 0$, so ist eben dieses Differential Rdx^3 u. s. f. (§. 139. Zusaz 2.) und hat immer eben dasselbe Zeichen, wie P, oder Q, oder R ꝛc. und daher kommt immer zum Werth der gegebenen Gleichung das Differential eben desselben Zeichens, das der Werth der hergeleiteten Gleichungen hat, die zuerst nicht verschwindet: wenn also dieser Werth eben dasselbe Zeichen mit dem Werth der gegebenen Gleichung hat, so wird derselbe da anfangen zu wachsen, und er kam daher zu einem Minimo: wenn er das entgegengesezte Zeichen hat, so wird er anfangen abzunehmen, er kam also zu einem Maximo; wenn er endlich wieder von o zurückkehret, so kam er zu einem Minimo oder o.

Beyspiele.

I.) In obigem ersten Beyspiel setze man die Zahl 2 für das unbekannte x, so wird der Werth der gegebenen Gleichung $= -16$; und der Werth der Gleichung Q, welche zuerst nicht verschwindet, wird $= 16$; daher diese beyde entgegengesezte Zeichen anzeigen, daß mit jener Wurzel 2 ein Maximum gegeben werde. Setzet man 4 für x, so wird die gegebene Gleichung $= 0$, also gibt die Wurzel 4 ein Minimum, oder 0. Sezt man 6 für x, so wird die gegebene Gleichung $= -16$, die zuerst nicht verschwindende Gleichung Q wird $= 16$; es zeigen also die entgegengesezte Zeichen abermal, daß von der Wurzel 6 ein Maximum gegeben werde.

II.) Setzet man im 2ten Beyspiel 1 für x, so wird die gegebene Gleichung $= 4$, und die hergeleitete zuerst nicht verschwindende Gleichung S wird $= -5$, daher die entgegengesezte Zeichen anzeigen, daß die Wurzel 1 ein Maximum gebe. Gleichergestalt, sezt man 5 für x, so wird die gegebene Gleichung $= -252$, und die hergeleitete zuerst nicht verschwindende Gleichung Q wird $= 160$: abermal zeigen also die entgegengesezte Zeichen, daß die Wurzel 5 ein Maximum gebe.

III.) Sezt man im 3ten Beyspiel 8 für x, so wird die gegebene Gleichung $= -512$, und die hergeleitete zuerst nicht verschwindende Gleichung Q wird $= 72$: demnach zeigen die entgegengesezte Zeichen, daß von der Wurzel 8 ein Maximum gegeben werde. Dieses alles wird eben so in allen anderen Beyspielen bestimmt.

Druckfehler und Verbesserungen.

Seite 8. Lin. 5. 6. 7. ist der Calcul falsch; es muß dafür gesezt werden:

$$24x - 16x - 12x - 6x - 4x - 3x = 6240 - 48x$$
$$24x - 41x = 6240 - 48x$$
$$-17x = 6240 - 48x$$
$$48x - 17x = 6240$$
$$31x = 6240$$
$$x = \frac{6240}{31}$$

S. 8. Lin. 20. statt $\frac{x}{3} - \frac{x}{2} = 10$ lies $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} = 10$.

S. 14. Lin. 13. statt mit $-c$ entstanden,
lies mit $+c$ entstanden,

S. 40. Lin. 21. sollten bey $d - a - x$ die Querstriche länger oder punktirt seyn, daß es deutlicher würde, daß hier eine Proportionen-Regel stehe. Noch mehr findet dieses S. 42. Lin. 2. statt, wo es heissen sollte $d \ldots . a \ldots .. d - x$.

S. 56. soll es heissen

$$\frac{3}{4}x + \frac{5}{8}x - 15 = x$$
$$\frac{11x}{8} - 15 = x$$
$$11x - 120 = 8x$$
$$11x - 8x = 120$$
$$3x = 120$$
$$x = \frac{120}{3} = 40$$

S. 64. Lin. 24. statt $x = 264 - 44 = 120$
lies $x = 264 - 144 = 120$

S. 69.

S. 69. Lin. 2. statt dieses in der Gleichung $x+y+z$ substituirt, lies in der Gleichung $x+y+z=105$ substituirt.

S. 84. Lin. penult. statt $x=3z-2+2z=5z=2$ lies $x=3z-2+2z=5z-2$

Lin. ult. statt $\frac{3z+1}{5}=\frac{15z-6+1}{5}$ rc.

lies $\frac{3x+1}{5}=\frac{15z-6+1}{5}$ rc.

S. 91. Bey den Beyspielen der Multiplication ist in Ansehung der Wurzelausziehung der folgende §. 46. S. 95. mit zu Hülfe zu nehmen.

S. 93. Lin. 6. deleatur $=0$.

S. 101. Lin. 3. statt $\sqrt[15]{c^2d^{-1}}$ lies $\sqrt[15]{c^2d^1}$ Auf eben dieser Seite (so wie auch sonst an mehreren Orten,) sollten die Dignitäts-Zahlen und Buchstaben mehr in der Höhe gesezt seyn.

S. 107. Lin. 22. deleatur $\frac{a+6d}{7}$.

S. 110. Lin. 13. statt bessere Formul, lies bequemere

S. 111. Lin. ult. statt $\frac{n^2-nd+2an}{2}=s$

lies $\frac{n^2d-nd+2an}{2}=s$

S. 130. Lin. 2. statt $\omega - aq^{u-1}$ lies $\omega - aq^{n-1}$

S. 150. Lin. 4. statt Log. $\frac{9}{2}$ lies $\frac{\text{Log. } 9}{2}$

S. 158. Lin. 6. statt $l1690-2ly=l10$ lies $l1690=l10+2ly$

S. 159. Lin. 14. statt $\frac{181}{19}$ lies $\frac{181}{l9}$.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Roesler, Gottlieb Friedrich, 1740-1790

Allgemein faßliche Anleitung zur Algebra durch häufige Beyspiele erläutert;
zu Ergänzung des mündlichen Unterrichts

Bd.: 1

Stuttgart (1789)

Math.p. 477-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10137865-3
VD18 90246217